

Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf elastomechanische Systeme

Dipl.-Ing. D. Ströbel

Universität Stuttgart
Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen
Pfaffenwaldring 7A
70569 Stuttgart

Januar 1995

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.sc. techn. h. c. K. Linkwitz

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Tag der Einreichung: 10. Mai 1996

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1996

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Einleitung und Zielsetzung	7
1.2	Inhalt im Überblick	8
1.3	Bezeichnungen und Definitionen	10
1.4	Vorüberlegungen zur Arbeit	12
1.4.1	Ein einheitliches Datenmodell zur Beschreibung netzartiger Strukturen	12
1.4.2	Minimalprinzipien der Netzberechnung	13
1.4.3	Allgemeine numerische Verfahren zur Netzberechnung	14
2	Zur geodätischen Ausgleichungsrechnung	15
2.1	Beschreibung der Methode der kleinsten Quadrate	15
2.2	Ein allgemeines Ausgleichungskonzept	18
2.2.1	Ausgleichungsrechnung nach vermittelnden Beobachtungen	21
2.2.2	Ausgleichungsrechnung nach bedingten Beobachtungen	27
2.2.3	Ausgleichungsrechnung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten	30
2.2.4	Ausgleichungsrechnung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten	31
3	Zur Mechanik elastischer Körper	33
3.1	Zur Berechnung kontinuierlicher Körper	34
3.1.1	Räumlicher Spannungszustand	34
3.1.2	Räumlicher Verzerrungszustand	36
3.1.3	Hookesches Elastizitätsgesetz	38
3.1.4	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	39
3.1.5	Prinzip der minimalen Gesamtenergie	40
3.2	Zur Berechnung diskreter Strukturen	42
3.2.1	Weggrößenverfahren	43
3.2.1.1	Beschreibung und Anwendungsmöglichkeiten	43
3.2.1.2	Theorie in Matrixschreibweise	44
3.2.1.3	Beispiel: ebenes Fachwerk	45
3.2.2	Kraftgrößenverfahren	46
3.2.2.1	Theorie in Matrixschreibweise	46
3.2.2.2	Beispiel: ebenes Fachwerk	48

4	Zur Berechnung mechanischer Strukturen mit der Ausgleichsrechnung	51
4.1	Energiemethoden zur Berechnung mechanischer Strukturen	51
4.1.1	Lineares Weggrößenverfahren	51
4.1.1.1	Ohne Vorverformungen	51
4.1.1.2	Mit Vorverformungen	52
4.1.2	Lineares Kraftgrößenverfahren	53
4.1.2.1	Ohne Vorverformungen	53
4.1.2.2	Mit Vorverformungen	56
4.2	Übertragung des allgemeinen Ausgleichsansatzes auf mechanische Strukturen . . .	58
4.2.1	Vermittelnde Ausgleichung und Weggrößenverfahren	58
4.2.2	Bedingte Ausgleichung und Kraftgrößenverfahren	61
4.2.2.1	Ohne äußere Lasten	61
4.2.2.2	Mit äußeren Lasten	63
5	Numerische Verfahren zur Netzberechnung	67
5.1	Konventionelle Sparsetechnik	68
5.1.1	Netztopologie und Besetzungsstruktur der Systemmatrix	68
5.1.2	Lösungsstrategien	70
5.1.2.1	Iterative Methoden	70
5.1.2.2	Direkte Methoden	70
5.1.3	Speichertechniken	73
5.1.3.1	Nicht verkettete Listen	73
5.1.3.2	Verkettete Listen	74
5.2	Hypersparsetechnik zur Berechnung aller Netzarten	74
5.2.1	Einführende Beschreibung der Hypersparsetechnik	74
5.2.2	Berechnung von Netzen mit Hypersparsealgorithmen	76
6	Anwendungen	79
6.1	Fachwerke	79
6.1.1	Formänderungsenergie des Fachwerkstabes	79
6.1.2	Fachwerksberechnung mit der Ausgleichsrechnung	82
6.1.2.1	Redundanzanteile	85
6.1.2.2	Fehlerellipsen	85
6.1.3	Beispiele	87
6.1.3.1	Fachwerk A	87
6.1.3.2	Fachwerk B	89
6.2	Seilnetze	92

6.2.1	Zur Bedeutung der Seilnetze	92
6.2.2	Zur Theorie der Seilnetze	92
6.2.3	Beispiel	96
6.2.3.1	Fehlerellipsoide	96
6.2.3.2	Redundanzanteile	98
6.3	Platten	99
6.3.1	Zur linearen Theorie dünner Platten	99
6.3.2	Zur Diskretisierung mit einem einfachen Dreieckselement	102
6.3.3	Beispiel	104
6.4	Minimalflächen unter Innendruck	106
6.4.1	Zur Bedeutung von Minimalflächen	106
6.4.2	Zur Theorie von Minimalflächen unter Innendruck	107
6.4.3	Beispiel	109
6.5	Stabtragwerke	110
6.5.1	Formänderungsenergie eines Stabelements infolge Biegung	110
6.5.2	Formänderungsenergie eines Stabelements infolge St. Venant Torsion	113
6.5.3	Stabtragwerksberechnung mit der Ausgleichsrechnung	115
6.5.4	Hypersparsetechnik zur Berechnung ebener Stabtragwerke	118
6.5.5	Beispiel	119
6.6	Geodätische Netzberechnungen aus mechanischer Sicht	121
7	Schlußbemerkungen	123
	Literaturverzeichnis	125
	Lebenslauf	

Einführung

1.1 Einleitung und Zielsetzung

Die rechnerische Behandlung von netzartigen Strukturen ist eine im Ingenieurwesen immer wiederkehrende und weit verbreitete Aufgabe. Die Netze stellen dabei die Grundstruktur zur Modellierung der zu berechnenden Objekte bzw. Vorgänge dar.

Netze treten beispielweise als Verbundnetze in der Elektrotechnik, als Eisenbahn- und Straßennetze im Verkehrswesen und als hydraulische Rohrleitungsnetze im Wasserbau auf. In der Geodäsie finden wir Strecken- und Richtungsnetze zur Bestimmung von Koordinaten. In der Architektur werden beispielsweise Seilnetze als tragende Konstruktionen eingesetzt. Auch in der Soziologie kommen Netze vor, sogenannte Soziogramme; man sollte sich in diesem Zusammenhang die Beziehungen von Personen oder ganzer Gruppen untereinander vorstellen. Die hier genannten Netze haben eines gemeinsam: es sind real existierende Netze im Gegensatz zu jenen, die erst durch das Modellieren zum Netz werden, wie z.B. die Erdoberfläche, deren topographische Eigenschaften etwa durch ein Raster von Punkten beschrieben wird, oder das Werkstück, das mit finiten Elementen gebildet und damit netzartig wird. Für eine allgemeine Betrachtung von Netzberechnungen spielt es natürlich keine Rolle, ob das Netz durch Vermaschung eines Kontinuums entstanden ist oder direkt vorliegt.

Sehr viele Arbeiten innerhalb des Ingenieurwesens sind Berechnungen von Netzen gewidmet, auch wenn die Bedeutungen zwischen den einzelnen Anwendungen sehr unterschiedlich sind. Ein gemeinsames Bindeglied aller Netze ist die topologische Netzbeschreibung, deren theoretische Grundlagen in der Graphentheorie behandelt werden. Wegweisende Arbeiten auf dem Gebiet der Netztheorie sind u.a. die Untersuchungen von Ford und Fulkerson [23], Berge und Ghouila-Houri [7]. In diesem Zusammenhang dürfen Gründig [34], Schek [89] und Neureither [69] nicht unerwähnt bleiben. Die Frage nach weiteren Gemeinsamkeiten drängt sich auf und wird untersucht. So berichten verschiedene Autoren über Analogien zwischen Netzen verschiedenen Typs, beispielsweise Linkwitz [55] zwischen geodätischen Streckennetzen und mechanischen Fachwerken oder Fenves und Branin zwischen elektrischen und mechanischen Netzen [21]. Daß dieses Forschungsgebiet keinesfalls abgeschlossen ist, beweisen Veröffentlichungen jüngerer Datums. So stellen Templeman und Yates vergleichende Untersuchungen zwischen hydraulischen Rohrnetzen und statischen Fachwerken an [100]. Gründig überträgt Zuverlässigkeitskriterien der geodätischen Netzausgleichung auf Rohrnetze [36], Bahndorf erkennt, daß den eben erwähnten Zuverlässigkeitsmaßen in der Seilnetzberechnung eine besondere Bedeutung zukommt [5]. Sie sind dort eine Beurteilungsgröße für die Fähigkeit eines Seiles, Vorspannkkräfte aufzunehmen. Einen ganz wesentlichen Beitrag zum Verständnis von Netzen leistete Otto, der durch seine Arbeiten [75] und [76] nicht nur das Wissen um mechanische Strukturen - wie z.B. Seilnetze und Holzgitterschalen - vertiefte, sondern auch sehr allgemeine und systematische Erkenntnisse zur Netztheorie entwickelte.

Eine allgemeingültige Netzbeschreibung umfaßt demnach zwei voneinander klar getrennte Teile, wobei der erste in einer von jeglicher Anwendung und Bedeutung losgelösten, topologischen Beschreibung, der zweite in einer netzfunktionalen Beschreibung, welche von der Art des Netzes abhängt, besteht. Diese Zweiteilung macht eines ganz deutlich. Der die Netztopologie betreffende Aspekt bei der Netzberechnung wird für alle Netzarten, ob es sich nun etwa um Streckennetze, Computernetze oder um Finite-Elemente-Netze handelt, identisch und damit austauschbar sein. Der mit der Netzart einhergehende Gesichtspunkt dagegen ist immer verschieden und steht einer Vereinheitlichung der gesamten Netzberechnung entgegen. Gemeinsamkeiten und damit Analogien zwischen den verschiedenen Netzarten sind dennoch offensichtlich, wie die erwähnten Arbeiten zeigen. Der Grund hierfür ist das den untersuchten Netzarten zugrundeliegende Minimumprinzip. Dieses Prinzip ist gewissermaßen das Naturgesetz, das die unterschiedlichen Netzarten miteinander verbindet und Analogien zwischen ihnen ermöglicht.

Die Lösung von Minimal- bzw. Extremalaufgaben beschäftigt die Mathematiker schon seit einigen Jahrhunderten. Leibniz fand als erster mit der auf ihn zurückgehenden Differential- und Integralrechnung eine Methode zur Bestimmung von Extremalwerten einer gegebenen Funktion mit einer Veränderlichen. Etwa gleichzeitig kam Newton zu ähnlichen Ergebnissen. Hiervon profitierten eine ganze Reihe von Wissenschaftlern, wie etwa Euler und die Gebrüder Bernoulli, die geradezu auf dieses Kalkül gewartet zu haben schienen. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts ist dann die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß und Legendre unabhängig voneinander und etwa gleichzeitig entdeckt worden. Den ersten Erfolg bei der Anwendung dieser Methode erzielte Gauß im Jahre 1802 als er den Orbit des Planeten Ceres bestimmte, obwohl lediglich wenige Grade seiner Bahn beobachtet worden waren. Gauß gilt als Begründer der geodätischen Ausgleichsrechnung, deren Kernstück die Kleinste Quadrate Methode darstellt [28]. Auf die Variationsrechnung wird hier nicht näher eingegangen, weil sie gewissermaßen kontinuierliche Größen als Unbekannte definiert, wohingegen die Ausgleichsrechnung bzw. die Kleinste Quadrate Methode mit einzelnen Meßwerten rechnet und damit diskret - sprich netzartig - bleibt.

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist die Übertragung der geodätischen Ausgleichsrechnung auf bestimmte Bereiche des Bauingenieurwesens, insbesondere der Mechanik bzw. der Statik. Dabei wird zunächst der Frage nachgegangen, unter welchen Voraussetzungen dieser Transfer der Kleinste Quadrate Methode nach Gauß zu realisieren ist. Das Augenmerk richtet sich in diesem Kontext auf frühere Untersuchungen zu diesem Thema, in denen bereits gezeigt wurde, daß Netzberechnungen systematisiert und verallgemeinert werden können. An dieser Stelle sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die vorliegende Arbeit sich keinesfalls mit der Übertragung von Methoden, welche die Netzbeschreibung in topologischer Hinsicht anlangen, befaßt, sondern sehr allgemein nach Regeln sucht, mit denen die unterschiedlichen Netzarten miteinander verknüpft werden können. Gemeinsames Bindeglied der verschiedenen Netze ist das oben erwähnte Prinzip der minimalen Energie, das hier mit der Methode der kleinsten Quadrate beschrieben und gelöst werden soll.

1.2 Inhalt im Überblick

In einer Einleitung, in der Vorüberlegungen zu dieser Arbeit angestellt werden, sollen Beweggründe, Motivationen und Zielsetzungen sichtbar werden. Darin wird dargelegt, daß einheitliche Datenmodelle zur Beschreibung netzartiger Strukturen sehr große Vorteile im Hinblick auf computergestützte Verfahren besitzen. Die Aufgabe der Netzbestimmung oder allgemeiner die Berechnung diskreter Strukturen geht sehr häufig mit der Minimierung eines Skalars einher. Diese beiden Tatsachen ermöglichen die Vereinheitlichung der Netzberechnung, denn die mathematischen Strukturen unterschiedlicher Netze sind aufeinander übertragbar. Die Algorithmen zur Netzberechnung, d.h. Aufbau und Lösung von in Matrizen formulierten Gleichungssystemen, sind applikationsneutral und damit universell einsetzbar. Alle Netzarten, die diese Voraussetzungen erfüllen, man kann auch sagen: die in diese Klasse fallen, sind gewissermaßen der Gegenstand dieser Arbeit. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zeigt, daß die Vereinheitlichung der Netzberechnung auch im Hinblick auf schnelle und speicherplatzsparende Algorithmen im Computer von Vorteil ist.

In Kapitel 2 erfolgt eine Abhandlung zur geodätischen Ausgleichsrechnung, soweit sie für das Verständnis der nachfolgenden Untersuchungen erforderlich ist. Dort wird die sogenannte Grundgleichung der Ausgleichsrechnung dargestellt, die so allgemein ist, daß sämtliche Standardverfahren der Ausgleichstechnik in ihr enthalten sind. Die beiden bekanntesten Standardverfahren, die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen und die bedingte Ausgleichung, werden im Anschluß ausführlich behandelt. Die Kombination aus beiden Ansätzen wird kurz gestreift.

In Kapitel 3 wird die Mechanik elastischer Körper beleuchtet; das wird in einem ersten Teil mit den Methoden der klassischen Mechanik getan, in denen infinitesimale Größen betrachtet werden: Grundbegriffe und Prinzipien der Statik werden behandelt. Insbesondere werden die Begriffe Gleichgewicht, Kinematik und Werkstoff eingeführt. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird dargelegt, damit das für diese Arbeit so wichtige Prinzip der minimalen Gesamtenergie definiert werden kann. In einem

zweiten Teil dieses Kapitels wird die Berechnung diskreter Strukturen vorgestellt. Nach Grundsätzlichem zur Diskretisierung kontinuierlicher Gebilde, liegt das Augenmerk auf der Einführung des Weg- und Kraftgrößenverfahrens. Es wird jeweils ein Beispiel gezeigt. Auch hier wird natürlich die Matrixschreibweise benutzt, die nicht zuletzt im Hinblick auf die Automation dieser Verfahren von Vorteil ist.

In Kapitel 4 wird die Übertragung der geodätischen Ausgleichsrechnung auf die Berechnung mechanischer Strukturen vollzogen. In einem ersten Teil dieses Kapitels werden deshalb die beiden Hauptverfahren zur Berechnung mechanischer Strukturen, das Weg- und Kraftgrößenverfahren, mit dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie behandelt; denn nur dann ist der Transfer der geodätischen Ausgleichsrechnung, der bekanntlich die gewichtete Quadratsumme von Verbesserungen minimiert, auf diese Methoden möglich. Die sich nach der Übertragung ergebenden Vorteile werden benannt; es wird sich zeigen, daß vor allem die geometrische Nichtlinearität der Ausgleichsrechnung auch hier problemlos formuliert werden kann. Sachverhalte, Tatsachen aus den geodätischen Anwendungen werden in die Statik übertragen. Vor allem die Genauigkeitsmaße der Unbekannten und die Redundanzanteile der Beobachtungen. Die mathematischen Strukturen der unterschiedlichen Netzarten sind grundsätzlich identisch. Kleine Unterschiede in der mathematischen Struktur sind von Fall zu Fall zu analysieren; mitunter können sie zu einer Erweiterung in einer bestimmten Netztheorie führen. Ein Beispiel hierfür sind die äußeren Lasten der Mechanik, die in der geodätischen Ausgleichsrechnung künstlich eingeführt werden müssen, um identische mathematische Strukturen zu erhalten. Die Identität dieser mathematischen Strukturen kann auch wie folgt definiert werden: die Abbildung (oder Transformation bzw. Übertragung) verschiedener Netztheorien aufeinander ist eindeutig umkehrbar, sie wird als bijektiv bezeichnet. Sie ist naturgemäß sehr einfach und besteht darin, analoge Größen zuzuordnen. Da nun Formalismus und Kalkül der Ausgleichsrechnung als Methode zur Netzberechnung sehr ausgereift sind, wird hier die Ausgleichsrechnung auf alle anderen Netztheorien angewendet oder abgebildet. Diese Abbildung funktioniert natürlich nur, wenn die Netztheorien in die oben angesprochenen Klassen fallen, wenn die mathematischen Strukturen der unterschiedlichen Netze also (fast) identisch sind.

Einheitliche Datenstrukturen bei der Beschreibung verschiedenartiger Netztypen schaffen gemeinsam mit der Anwendung gleicher Strategien bei der Lösung der Extremalaufgaben ein globales Konzept für die Netzberechnung. Die Verwendung von bestimmten Datenstrukturen zur Beschreibung von Netzen ist am Institut des Verfassers seit langem üblich und bedarf keiner Erläuterung; die Hypersparsetechnik - eine Erweiterung der konventionellen - als effizientes Verfahren zur Lösung großer Gleichungssysteme von netzartigen Strukturen hingegen wird in Kapitel 5 definiert und eingeführt. Beispiele helfen den Sachverhalt zu verdeutlichen. Die Hypersparsetechnik minimiert den Berechnungsaufwand in bezug auf Speicherplätze und Rechenzeiten. Die ständige Verbesserung dieser Strategie ist sehr wirkungsvoll, denn sie kommt der Lösung aller Probleme entgegen, die derartig behandelt werden können, also sämtlicher Ausgleichsprobleme sowie daraus abgeleiteter Aufgaben (z.B. in der Mechanik).

In Kapitel 6 werden Anwendungen dieses Konzeptes vorgestellt. Zunächst werden mechanische Fachwerke mit dem Prinzip der vermittelnden Ausgleichung mit Zusatztermen berechnet. Die Anwendung der Redundanzanteile zur Berechnung von Fachwerken wird eingeführt. Fehlerellipsen zeigen die Stabilität von Fachwerksknoten unter dem Angriff äußerer Einzellasten; sie werden als Hilfsmittel zur Beurteilung mechanischer Fachwerke benutzt. Die Wirkungsweise der geometrischen Steifigkeit wird mit der Hilfe von Seilnetzen erläutert. Es wird der Versuch unternommen, den Begriff Redundanz im Hinblick auf diese Art von Tragwerken zu erweitern. Daß das Konzept der geodätischen Ausgleichsrechnung universell einsetzbar ist, erkennt man bei der Berechnung von Platten; nach einem kurzen Exkurs in die Theorie dünner Platten wird die Ausgleichsrechnung zur Berechnung herangezogen; dabei wird ein einfaches dreieckiges Plattenelement benutzt. Minimalflächen unter Innendruck werden im Anschluß daran mit der vermittelnden Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten berechnet; an dieser Anwendung wird die Effizienz der Hypersparsetechnik dargestellt. Nicht nur die Übertragung der geodätischen Ausgleichsrechnung auf die Mechanik von Tragwerken, sondern auch die umgekehrte Richtung kann erfolgreich sein. Der Kraftbegriff der Mechanik wird auf geodätische Netzberechnungen angewendet. Danach werden allgemeine Stabtragwerke mit der geodätischen Aus-

gleichungsrechnung behandelt. Die Fehlergleichungen werden aufgestellt. An verschiedenen Beispielen werden die Vorteile dieser Betrachtungsweise aufgezählt.

1.3 Bezeichnungen und Definitionen

An dieser Stelle erfolgt eine Anmerkung zu den verwendeten Bezeichnungen. Dabei wird der Formalismus der Ausgleichsrechnung und der Elastomechanik bzw. Computerstatik weitgehend beibehalten. Aus diesem Grund mag es vorkommen, daß unterschiedliche Größen mit der gleichen Bezeichnung Verwendung finden. Die Darstellung folgt der Ausgleichsrechnung [59], der Elastomechanik [30] und der Computerstatik [52]. Sehr häufig werden - des besseren Verständnisses wegen - in den einzelnen Kapiteln die dort benötigten Größen definiert; hier nun werden alle anderen eingeführt.

Im folgenden bedeuten: kleine Buchstaben Skalare, kleine unterstrichene Buchstaben Vektoren und große fette Buchstaben Matrizen. Wir unterteilen die Bezeichnungen nach folgenden Gebieten:

Ausgleichsrechnung

C	Kanten-Knotenmatrix; Inzidenzmatrix
$c_{i,j}$	das Element in der Zeile i und der Spalte j der Kanten-Knotenmatrix C
$\varphi(\varepsilon)$	Fehlerhäufigkeitsfunktion
ε	Elementarfehler
σ	theoretischer mittlerer Fehler
Ω	Wahrscheinlichkeit
v	Verbesserung
l	Beobachtung
p	Beobachtungsgewicht
h	Präzisionsmaß
Φ	gewogene Quadratsumme der Verbesserungen
\underline{v}	Vektor der Verbesserungen
\underline{q}	Vektor der Korrelaten
P	Gewichtsmatrix
A	Jakobimatrix, Konfigurationsmatrix, Designmatrix
B	Jakobimatrix
$\underline{y}, \underline{x}$	Vektor der Unbekannten
$\underline{y}_j, \underline{x}_j$	Vektor der Unbekannten in der Iteration j
$\underline{y}_0, \underline{x}_0$	Vektor der Unbekannten in der Iteration 0 (Näherungs- bzw. Rohwerte)
$\underline{\Delta y}, \underline{\Delta x}$	Differenzvektor zwischen zwei Iterationen
$\underline{\nabla y}, \underline{\nabla x}$	Infolge grober Beobachtungsfehler verfälschte Vektoren $\underline{y}, \underline{x}$
E	Einheitsmatrix
O	Nullmatrix
Z	Matrix der zweiten Ableitungen
D	Diagonalmatrix bzw. Diagonalmatrix der Eigenwerte
S	Matrix der Eigenvektoren

\mathbf{Q}	Matrix der Kofaktoren
\mathbf{A}_0	spezielle Einheitsmatrix
\mathbf{B}_0	spezielle Einheitsmatrix
$sp(\mathbf{B})$	Spur der Matrix \mathbf{B}
r	Redundanz
r_i	Redundanzanteil der Beobachtung i

Elastomechanik

x, y, z	Ortskoordinaten	δ	virtuell bzw. Variation von
σ	Normalspannungen	A_i	Formänderungsenergie, innere Energie
τ	Schubspannungen	\underline{v}	Vektor der Elementverformungen
u, v, w	Verschiebungen	\underline{s}	Vektor der Elementkräfte
X, Y, Z	Volumenkräfte	\underline{p}	Vektor der äußeren Lasten
E	Elastizitätsmodul	\underline{r}	Vektor der Knotenverformungen
μ	Querdehnzahl (Reziprokwert der Poissonschen Konstante)	\underline{k}	Vektor der statisch Unbestimmten
G	Schubmodul	\mathbf{F}	Flexibilitätsmatrix
ε, γ	Verzerrungen	\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
ε	Dehnung	\mathbf{A}	Gleichgewichtsmatrix
ε_q	Querdehnung	\mathbf{B}_0	Matrix der Lastspannungszustände
\mathbf{D}	Elastizitätsmatrix	\mathbf{B}_x	Matrix der Eigenspannungszustände
O	Oberfläche	K	Plattensteifigkeit
V	Volumen	m	auf Einheitslänge bezogene Momente
Π	Gesamtenergie	q	auf Einheitslänge bezogene Kräfte
Π_i	innere Energie, Formänderungsenergie		
Π_a	äußere Energie, Potential der äußeren Lasten		
Π	Gesamtenergie		

Folgende Vereinbarungen werden getroffen:

$$\underline{f}(\underline{x}) := \begin{matrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\underline{x})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\underline{x})}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\underline{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\underline{x})}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

1.4 Vorüberlegungen zur Arbeit

1.4.1 Ein einheitliches Datenmodell zur Beschreibung netzartiger Strukturen

Zusammenhängende Gebilde, die aus einer beliebigen Anzahl von Knotenpunkten und aus Verbindungen zwischen diesen Knotenpunkten, im folgenden als Kanten bezeichnet, bestehen, werden generell als Netzstrukturen bezeichnet. Die Bedeutung der Knotenpunkte und ihrer Kanten spielt hierbei keine Rolle. Nach der Art der Verknüpfung unterscheidet man verschiedene Netzformen, z.B. Linien-, Verzweigungs-, Flächen- und Knotennetze. Neben diesen können beliebige Mischformen existieren. Charakteristisch für alle Netzstrukturen ist die Tatsache, daß sie - unabhängig von ihrer jeweiligen Erscheinungsform - durch die Gesamtheit ihrer Einzelelemente (Knoten und Kanten) vollständig definiert sind. Dabei ist es unerheblich, ob das Netz gewissermaßen von Haus aus ein Netz ist (z.B. das Seilnetz in der Statik) oder durch Diskretisierung eines Kontinuums netzartig geworden ist (z.B. ein digitales Geländemodell in der Geodäsie). Die Entwicklung von einheitlichen Datenstrukturen zur allgemeinen Netzbeschreibung führt über die sogenannte Graphentheorie, die eine relativ junge Disziplin der Mathematik ist. Sie beschäftigt sich mit der Beschreibung und Analyse von Strukturen, die als Kanten-Knoten-Strukturen darstellbar sind. Kanten-Knoten-Strukturen bezeichnet man in der Graphentheorie als Graphen. Ein Graph ist eindeutig durch Angabe seiner Knoten- und Kantenmenge sowie durch die Inzidenzabbildung der Knoten auf die Kanten definiert. Dabei ordnet die Inzidenzabbildung jeder Kante zwei Knoten zu. Die Geometrie, also die Lage der Knoten im Raum etwa oder die Form der Kanten, ist in diesem Kontext bedeutungslos. Der Graph ist unabhängig von einer Metrik definiert. Der Graph besteht somit aus einer bestimmten Anzahl von Knoten und Kanten und der Inzidenzabbildung. In unserem Verständnis sind die Begriffe Topologie und Graph synonym. Sehr viel ausführlicher sind diese Fakten in [8],[68], [69], [71] und [83] beschrieben.

Mit diesem Rüstzeug ausgestattet wollen wir die Topologie eines Netzwerkes beschreiben durch seine n Knoten und m Kanten und die Inzidenzabbildung der Knoten auf die Kanten. Wir tun dies mit Hilfe der sogenannten Kanten-Knotenmatrix \mathbf{C} , welche die Dimension (m, n) besitzt und deren Elemente folgendermaßen definiert sind

$$c_{i,j} = \begin{cases} +1 & \text{wenn die Kante } i \text{ im Punkt } j \text{ beginnt} \\ -1 & \text{wenn die Kante } i \text{ im Punkt } j \text{ endet} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	...	Ⓜ
Ⓛ	1	-1								
Ⓜ	1	-1								
Ⓛ	1		-1							
Ⓜ			1	-1						
Ⓛ			1		-1					
Ⓜ			1			-1				

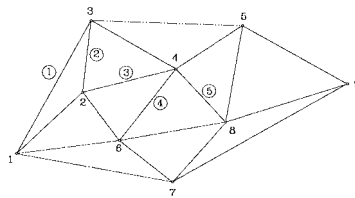


Abbildung 1.1: Netzstruktur und Kanten-Knotenmatrix \mathbf{C}

Der Rang der Matrix \mathbf{C} ist dabei um 1 kleiner als die Anzahl der Knoten, wenn das Netz zusammenhängend ist, d.h. wenn jeder Knoten mit allen anderen durch eine Folge von Kanten verbunden ist, also $rg(\mathbf{C}) = n - 1$. Die Matrix $\mathbf{C}^t \mathbf{C}$ wird als Knoten-Knotenmatrix bezeichnet. Das Element (i, j)

für $i \neq j$ dieser Matrix ist -1 , wenn der Knoten i mit dem Knoten j verknüpft ist, sonst 0 . Das Diagonalelement (i, i) gibt die Armigkeit des Knotens i an, d.h. die Anzahl der Nachbarknoten, welche mit dem Knoten i durch eine Kante verbunden sind. Das Element (i, j) der Kanten-Kantenmatrix CC^t besitzt für $i \neq j$ den Betrag 1 , wenn die Kante i an die Kante j anschließt, und zwar $+1$, wenn die Kanten gegensinnig, und -1 , wenn die Kanten gleichsinnig sind, in allen anderen Fällen 0 . Das Diagonalelement weist immer den Wert 2 auf. An dieser Stelle soll der Begriff Adjazenz erwähnt werden, nachdem oben die Inzidenz bereits erläutert wurde. Unter Inzidenz versteht man das Ineinanderfallen verschiedenartiger, unter Adjazenz das Aneinandergrenzen gleichartiger Strukturelemente. Die Knoten-Knotenmatrix bzw. die Kanten-Kantenmatrix sind somit die Adjazenzmatrizen der Knoten bzw. Kanten.

Diese Art der Beschreibung von netzartigen Strukturen ist ein applikationsneutraler, allgemein einsetzbarer Grundbaustein, der sich auch auf die Darstellung von Netzen im Computer bezieht [35]. Aus dem Begriff applikationsneutral folgt sofort, daß die angesprochenen Module austauschbar in bezug auf unterschiedliche Anwendungen und damit für alle Netzarten zu verwenden sind. Eine Netzart besteht aus der topologischen Netzbeschreibung und einer geometrischen, physikalischen oder sonstigen Netzmodellierung. Einige Beispiele sollen den Begriff Netzart verdeutlichen, als da sind: Computernetze, Transportnetze, Finite Elemente Netze auf höherer Ebene und darunter: Seilnetze, Straßennetze, Wassernetze, etc.. Durch die Trennung bzw. durch die Unabhängigkeit zwischen Topologie und dem mit der Netzart einhergehenden Modell ergeben sich eine Reihe von Vorteilen; so fallen strukturelle Datenänderungen, d.h. Änderungen der Objektmengen oder deren Beziehungen untereinander, nur dann an, wenn sich die topologischen Daten ändern. Eine Änderung geometrischer, physikalischer oder anderer Daten bewirkt keine topologische Strukturänderung. In diesem Fall werden lediglich Attribute des jeweiligen Objektes oder der jeweiligen Objektbeziehung substituiert.

Die Frage, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden soll, kann nun sehr allgemein formuliert werden. Ist die Vereinheitlichung von Netzen unterschiedlicher Anwendungen, also von Netzarten, mit der auf der Graphentheorie basierenden identischen topologischen Darstellung und der unterschiedlichen Modellierung im Hinblick auf Geometrie, Physik, etc. der zu berechnenden Objekte möglich und wenn ja unter welchen Voraussetzungen?

1.4.2 Minimalprinzipien der Netzberechnung

Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, daß die datentechnische Beschreibung von Netzen von der Netzart unabhängig und damit austauschbar ist. Die mit der Netzart korrelierten Modelle dagegen sind immer verschieden und verhindern gewissermaßen die ganzheitliche Beschreibung aller Netzarten in einer Theorie. Bei näherer Betrachtung dieser anwendungsabhängigen Modelle der Netzberechnung fällt eines auf. Die Berechnung fast all dieser unterschiedlichen Netzarten erfolgt mit Hilfe von Extremalprinzipien. Die Netze in der Geodäsie minimieren die gewogene Quadratsumme der Verbesserungen, die mechanischen Netze der Statik minimieren die Gesamtenergie des Systemes, die Transportnetze zum Warentransfer etwa versuchen die anfallenden Kosten zu minimieren, die elektrischen Netze minimieren die elektrische Leistung, Rohrleitungsnetze die Verlustenergie. Zienkiewicz [107] und Bufler [11] beschreiben diese Tatsache für mechanische Strukturen sehr ausführlich. Nun sei für den Anfang eine Arbeitshypothese gewagt. Die Netzberechnungen, bei welchen ein Skalar (Kosten, Energie, Quadratsumme von Verbesserungen) einen Extremalwert anzunehmen hat, können vereinheitlicht werden; diese verschiedenen Netzarten können also mit einer Theorie beschrieben werden. Im Hinblick auf die Datenverarbeitung erscheint dieser Sachverhalt besonders wichtige Konsequenzen zu haben, denn damit erscheint die Berechnung unterschiedlicher Netzarten in einem einzigen Computerprogramm realisierbar. Wenn dies gelingt, dann müssen Sachverhalte oder Tatsachen aus den verschiedenen Bereichen, in denen Netzberechnungen vorkommen, aufeinander übertragen werden können, dann müssen Entsprechungen bzw. Analogien existieren. Die wichtigste dieser Entsprechungen, welche gewissermaßen die Vereinheitlichung ermöglichen kann, haben wir bereits genannt. Es handelt sich um das Extremal- bzw. Minimalprinzip, das sehr vielen Netzberechnungen zugrunde liegt. Alle anderen werden für den Einzelfall exakt zu benennen sein. Da nun die auf Gauß zurückgehende Ausgleichsrechnung ein

mächtiges Instrument zur Berechnung von netzartigen Strukturen darstellt, und die Theorie und Praxis der geodätischen Netzberechnung lange Tradition besitzen, werden im Rahmen dieser Arbeit alle anderen Netzarten in Beziehung zur Ausgleichsrechnung gesehen und untersucht. Das bedeutet im einzelnen, daß z.B. ein Warentransportnetz nicht mit einem elektrischen Netz verglichen wird, sondern beide in Relation zur Ausgleichsrechnung betrachtet werden. In der Ausgleichsrechnung wird die Quadratsumme der Verbesserungen minimiert mit verschiedenen mathematischen Ansätzen. Wenn das Ziel - Vereinheitlichung der Netzberechnungen, d.h. die Minimierung eines Skalars - erreicht werden soll, müssen die unterschiedlichen mathematischen bzw. ausgleichungstechnischen Ansätze in einem allgemeineren zusammengefaßt werden. Dabei wird der Fall eintreten, daß die im Konzept Ausgleichsrechnung definierten Größen nicht ausreichen. Erweiterungen im Ausgleichungsansatz werden somit notwendig, um die unterschiedlichen Netzarten zu berechnen. Alle Netzarten, deren Gleichgewichtszustände bzw. Lösungspunkte durch die Minimierung von Skalaren bestimmt sind, können also mit einem erweiterten Ausgleichungskonzept berechnet werden. So werden z.B. in [84] Transportnetze mit Hilfe der Ausgleichsrechnung analysiert und optimiert. In der vorliegenden Arbeit soll vor allem die Übertragung der geodätischen Ausgleichsrechnung auf mechanische Strukturen untersucht und vollzogen werden. An dieser Stelle soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß hier die Ausgleichsrechnung nicht dazu benutzt wird, zwischen mechanischen Größen einen Abgleich zu realisieren oder z.B. das Gleichgewicht im Mittel einzuhalten [78], [107]. Vielmehr werden die mathematischen Strukturen der Ausgleichsrechnung so modifiziert, daß mechanische Verfahren mit ihnen ausgedrückt werden können.

1.4.3 Allgemeine numerische Verfahren zur Netzberechnung

Der Bedarf an effizienten Algorithmen zur Lösung und Inversion von Gleichungssystemen hat aus mehreren Gründen stark zugenommen. Erstens: die zu berechnenden Netze werden immer größer, man denke z.B. an die automatische Meßwerterfassung; zweitens: die Eingangsparameter müssen häufig variiert werden bis ein befriedigendes Ergebnis erreicht ist, d.h. die Anzahl der Wiederholungsberechnungen sollte keinesfalls aus Gründen der Rechenzeit beschränkt werden.

Eine Steigerung der Effizienz dieser Algorithmen wird dadurch möglich, daß bei netzartigen Strukturen die entstehenden Matrizen im allgemeinen dünnbesiedelt bzw. -besetzt sind. Damit wird es möglich, die (vielen) Nullelemente weder zu speichern noch zu bearbeiten. Verfahren, die auf die Speicherung und dann zwangsläufig auf Operationen mit Nullelementen verzichten, werden als Sparseverfahren bezeichnet. Sparse bezeichnet den Zustand der schwachen Besetztheit dieser Matrizen. Aufgrund der Tatsache, daß die Besetztheit der verschiedenen Matrizen einer Netztheorie durch die Netztopologie bestimmt ist, besitzen Sparsealgorithmen netzartunabhängige Module. Diese applikationsneutralen Bausteine der Sparsetechnik sind für alle Netze identisch und damit austauschbar. Die Schnittstelle zu den netzartabhängigen Größen wird so plaziert, daß die Anzahl der applikationsneutralen Algorithmen der Sparsetechnik maximal wird, d.h. die netzartabhängigen Teile der Sparsetechnik bleiben so klein wie möglich. Der Grund für dieses Vorgehen ist einleuchtend: die verschiedenen Netzartberechnungen werden mit identischen (applikationsneutralen) Algorithmen der Sparsetechnik durchgeführt; eine Optimierung dieser Verfahren kommt damit allen Netzen zugute. Die netzartabhängige Adaption von gewissen Teilen der Sparsetechnik dagegen beschränkt sich auf das notwendige.

Zur geodätischen Ausgleichsrechnung

2.1 Beschreibung der Methode der kleinsten Quadrate

Obwohl die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Grundzügen auch über das geodätische Umfeld hinaus bekannt sein wird, erfolgt eine kurze Beschreibung des für das weitere Verständnis erforderlichen. Grundlagen zu dieser Thematik werden von Gauß [28], Helmert [45] und etwa Czuber [17] gegeben. Als weiterführende Literatur sind [31], [32], [33], [47], [50], [54] und [106] zu nennen. In der Vergangenheit war die geodätische Ausgleichsrechnung gewissermaßen die Anwendung der Kleinsten Quadrate Methode. Heute, nachdem vielfach der statistische Zugang zu dieser Problematik gewählt wird, und die Kleinste Quadrate Methode als eine bestimmte unter den Maximum-Likelihood-Methoden angesehen werden kann, ist die Ausgleichsrechnung mehr als die ausschließliche Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die im folgenden so hergeleitet wird, daß es für das Verständnis dieser Arbeit ausreicht.

Im allgemeinen führt man in der Geodäsie mehr Beobachtungen aus, als zur eindeutigen Bestimmung der gesuchten Größen notwendig ist. Dies hat eine ganze Reihe von Vorteilen: man steigert die Genauigkeit und kann auch ein Maß für die erreichte Genauigkeit angeben; Sicherheit gegen grobe Fehler ist gewährleistet und Rechenfehler im Ausgleichsprozeß werden erkannt.

Die Beobachtungen oder Meßwerte widersprechen einander im Rahmen ihrer zufallsbedingten Streuungen. Offenbar ist derjenige Wert der gesuchten Größen der beste, dem unter Berücksichtigung aller Beobachtungen die höchste Wahrscheinlichkeit zukommt. Dieser Wert kann unter der Voraussetzung berechnet werden, daß das Verteilungsgesetz der Beobachtungen bekannt ist, wenn etwa sicher ist, daß sie dem Gaußschen Fehlergesetz folgen oder anders ausgedrückt, daß sie normalverteilt sind. Siehe z.B. [17].

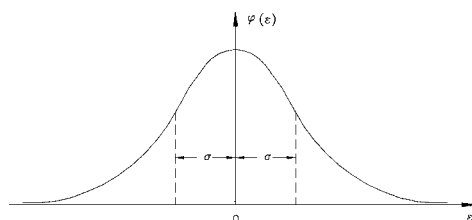


Abbildung 2.1: Normalverteilung

Die erwähnten, zufallsbedingten Widersprüche der Beobachtungen l_1, l_2, \dots, l_n kommen in der Berechnung vor als die Residuen oder Verbesserungen v_1, v_2, \dots, v_n . Da nun den durch die Ausgleichung ermittelten Größen die höchste Wahrscheinlichkeit zukommen soll, muß dies auch für das dazugehörige System der Verbesserungen gelten. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes, also der Fehlerhäufigkeitsfunktion $\varphi(\varepsilon)$, die ein Maß angibt, welches proportional ist für die Häufigkeit des Elementarfehlers ε , wobei σ als theoretischer mittlerer Fehler bezeichnet wird,

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \quad (2.1)$$

läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer beliebigen Beobachtung zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, durch

$$\varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon \quad (2.2)$$

ausdrücken. Nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß n Beobachtungen die Fehler v_1, v_2, \dots, v_n anhaften, dem Produkt

$$\Omega = \varphi(v_1) \varphi(v_2) \dots \varphi(v_n) \quad (2.3)$$

proportional. Weiterhin soll die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler v_i einer Beobachtung l_i zwischen die Grenzen v und $v + dv$ fällt, nicht für alle Beobachtungen gleich sein, sondern - mit der üblichen Bezeichnung $h_i = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_i}$ - insbesondere für die Beobachtung i

$$\varphi(v_i) dv = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 v_i^2} dv \quad (2.4)$$

betragen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Residuen v_i , die zu Ω proportional ist, soll maximal werden, woraus nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung sofort folgt

$$\Omega = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \dots + h_n^2 v_n^2)} \Rightarrow \text{Maximum} . \quad (2.5)$$

Für das wahrscheinlichste System der Verbesserungen und damit die wahrscheinlichsten Werte der durch die Ausgleichung bestimmten Größen muß demnach gelten

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \dots + h_n^2 v_n^2 \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (2.6)$$

Führt man weiterhin eine Beobachtung l , welcher das Präzisionsmaß h zukommt, als Gewichtseinheit ein, und bezeichnet die Gewichte der Beobachtungen l_i mit p_i , so gilt

$$1 : p_1 : p_2 : \dots : p_n = h^2 : h_1^2 : h_2^2 : \dots : h_n^2 . \quad (2.7)$$

Damit ergibt sich das der gesamten Ausgleichungsrechnung zugrunde liegende Prinzip vom Minimum der gewichteten Quadratsumme der Verbesserungen oder die sogenannte Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate

$$\Phi = v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \dots + v_n^2 p_n \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (2.8)$$

Die Eigenschaften dieser Methode sind bemerkenswert und werden noch einmal vollständig angegeben. Wie oben gezeigt, liefert die Methode der kleinsten Quadrate wahrscheinlichste Werte der Verbesserungen und damit der Unbekannten bei Vorliegen des Gaußschen Fehlergesetzes für die Beobachtungen. Dies wird üblicherweise als die erste Gaußsche Begründung für die Anwendung dieser Methode bezeichnet.

Unter der weniger scharfen Voraussetzung, daß positive und negative Fehler gleicher Größenordnung gleich häufig auftreten, erhalten die mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelten Werte für die Unbekannten kleinste mittlere Fehler und größte Gewichte, wie Gauß in der *Theoria combinationis* nachweist. Dies ist die sogenannte zweite Gaußsche Begründung.

Ist auch diese Vorbedingung nicht erfüllt, so hat die Methode der kleinsten Quadrate den Vorzug, unter Anbringen kleinster Verbesserungen eindeutige Werte der Unbekannten und deren mittlerer Fehler

anzugeben. Dies erfolgt mit wenig Rechenarbeit und großer Sicherheit und gibt gleichzeitig wertvolle Einblicke in das Verhalten und die Fortpflanzung der Beobachtungsfehler. Das von Gauß hergeleitete Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate gilt für ursprüngliche und unabhängige Beobachtungen, deren Verbesserungen nach den angegebenen Fehlerhäufigkeitsfunktionen verteilt sein müssen. Da die Verteilungsgesetze der Meßwerte im allgemeinen aufgrund zu kleiner Stichproben nicht vorliegen, werden die Resultate der Ausgleichung nicht als wahrscheinlichste, sondern als plausibelste oder günstigste Werte bezeichnet.

Die Theorie dieses Prinzips ist später von z.B. Helmert und Tienstra ergänzt worden. Im wesentlichen wurden dabei die folgenden zwei Erweiterungen eingeführt. Erstens: anstelle der ursprünglichen können abgeleitete Beobachtungen in die Ausgleichung eingebracht werden und zwar unter der Voraussetzung, daß deren algebraische Korrelation berücksichtigt wird. Zweitens: Ursprünglich, d.h. physikalisch korrelierte Beobachtungen werden nach demselben Prinzip ausgeglichen. Damit lautet das verallgemeinerte Ausgleichsprinzip in Matrixschreibweise

$$\Phi = \underline{v}^T \mathbf{P} \underline{v} \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (2.9)$$

Im Gaußschen Verständnis ist \mathbf{P} eine Diagonalmatrix mit ausschließlich positiven Elementen, in der Verallgemeinerung ist \mathbf{P} eine symmetrische Matrix mit wohldefinierten Eigenschaften; sie ist positiv definit. Sie enthält als sogenannte a-priori-Information die geschätzten Genauigkeiten der Beobachtungen, welche man im sogenannten **stochastischen Modell** beschreibt.

Je nach Problemstellung werden verschiedene Verfahren der mathematischen Behandlung entwickelt. Die im folgenden beschriebenen erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern stehen im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit.

1. *Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.* Das Verfahren der vermittelnden Beobachtungen wird im allgemeinen dann angewendet, wenn mehrere Unbekannte gemeinsam zu bestimmen sind und die Anzahl der Beobachtungen größer ist als die der Unbekannten. Dabei sind in der Regel nicht die Unbekannten selbst gemessen worden, sondern andere Größen, die mit ihnen in einem funktionellen Zusammenhang stehen. Nun werden in den Fehlergleichungen die Beobachtungen durch die Unbekannten ausgedrückt, so daß sie *mittels* der Unbekannten verglichen werden können. In diesen Gleichungen zeigt sich das **funktionale Modell**. Danach werden die unvermeidbaren Messungswidersprüche aufgrund der Forderung Φ zum Minimum beseitigt.
2. *Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen.* Bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen werden die Verbesserungen erst nach der Bestimmung der Unbekannten gewissermaßen nebenbei erhalten. Mitunter ist aber möglich, die Verbesserungen selbst als Unbekannte zu betrachten und von vornherein zu bestimmen. Dies ist dann der Fall, wenn die ausgeglichenen Beobachtungen gewisse *Bedingungen* erfüllen müssen. Nun werden die unbekanntenen Verbesserungen so bestimmt, daß der Forderung Φ zum Minimum Genüge getan wird und die erwähnten Bedingungen eingehalten werden. Zu diesem Zweck werden sogenannte Korrelaten eingeführt, die unter dem Begriff Lagrangemultiplikatoren besser bekannt sind.
3. *Die vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten.* Bei diesem Verfahren werden die Fehlergleichungen wie in der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen aufgestellt. Darüber hinaus haben die Unbekannten gewissen Bedingungen zu genügen. Die unbekanntenen Größen werden nun so bestimmt, daß die Bedingungen eingehalten werden und Φ zum Minimum wird.
4. *Die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten.* Die ausgeglichenen Beobachtungen und weitere unbekanntene Größen haben gewissen Bedingungen zu genügen, die einzuhalten sind unter der Hauptforderung: gewogene Quadratsumme der Verbesserungen zum Minimum.

Die gezeigten und weitere Verfahren, die hier nicht untersucht werden, wie z.B. die Ausgleichung direkter Beobachtungen sind Sonderfälle eines sehr viel allgemeineren Ausgleichungskonzeptes. Dieses Konzept kann nicht nur zur Ausgleichung von (geodätischen) Meßverfahren herangezogen werden,

sondern eignet sich hervorragend zur Berechnung von Vorgängen, bei welchen ein Wert stationär (minimal) werden muß; dieser Wert ist bei der Beschreibung von Prozessen in der Natur im allgemeinen die Energie oder das Potential. Somit entspricht die Methode der kleinsten Quadrate den Grundgesetzen der Mechanik; sie erscheint damit nicht als willkürliches Prinzip, sondern befindet sich im Einklang mit den Naturgesetzen, ist Ausdruck der physikalischen Realität [25].

2.2 Ein allgemeines Ausgleichungskonzept

Die verschiedenen Ausgleichungsstrategien können aus einem sehr allgemeinen Ausgleichungskonzept abgeleitet werden. Dies soll im folgenden kurz beschrieben werden vor allem im Hinblick auf die spätere Übertragung auf die klassischen Verfahren der Mechanik. Das Potential Φ (der Begriff *Potential* wird hier eingeführt, um anzudeuten, daß mit diesem allgemeinen Konzept nicht nur Sachverhalte aus der klassischen Ausgleichungsrechnung, also Vorgänge, bei welchen Meßwerte zu korrigieren sind, behandelt werden können; später wird auch der Begriff *Energie* benutzt) der zu minimierenden Funktion lautet mit den Veränderlichen \underline{x} , \underline{v} , \bar{l} , \underline{q}_1 , \underline{q}_2 , \underline{q}_3 , \underline{t}_1 und \underline{t}_2 .

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{x}, \underline{v}, \bar{l}, \underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3, \underline{t}_1, \underline{t}_2) = & \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{P} \underline{v}}_{\alpha} - \\ & \underbrace{\underline{q}_1^t (\underline{g}_1(\bar{l}) - \underline{c}_1)}_{\beta_1} - \underbrace{\underline{q}_2^t (\underline{g}_2(\underline{x}) - \underline{c}_2)}_{\beta_2} - \underbrace{\underline{q}_3^t (\underline{g}_3(\underline{x}, \bar{l}) - \underline{c}_3)}_{\beta_3} - \\ & \underbrace{\underline{t}_1^t (\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x}))}_{\gamma_1} - \underbrace{\underline{t}_2^t (\underline{l} + \underline{v} - \bar{l})}_{\gamma_2} - \\ & \underbrace{\underline{p}^t (\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\delta} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Diese Gleichung wird im folgenden als die *Grundgleichung der Ausgleichungsrechnung* bezeichnet. Dabei seien folgende Vektoren definiert, wobei n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der Unbekannten, r_1 die Anzahl der Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen, r_2 die Anzahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten und r_3 die Anzahl zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekannten bedeuten. Im einzelnen sind die Vektoren und die Matrix \mathbf{P} wie folgt definiert, wobei die Werte in den runden Klammern die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten bedeutet.

$\underline{x}_{(1,m)}^t$	$= [x_1, x_2, \dots, x_m]$	Vektor der Unbekannten
$\underline{v}_{(1,n)}^t$	$= [v_1, v_2, \dots, v_n]$	Vektor der Verbesserungen
$\bar{l}_{(1,n)}^t$	$= [\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n]$	Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen
$\underline{q}_{1(1,r_1)}^t$	$= [q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1r_1}]$	Korrelatenvektor für die Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen
$\underline{q}_{2(1,r_2)}^t$	$= [q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2r_2}]$	Korrelatenvektor für die Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten
$\underline{q}_{3(1,r_3)}^t$	$= [q_{31}, q_{32}, \dots, q_{3r_3}]$	Korrelatenvektor für die Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekannten
$\underline{t}_{1(1,n)}^t$	$= [t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}]$	Korrelatenvektor für die Bedingungsgleichungen zwischen den Verbesserungen und den Unbekannten

$\underline{t}_{2(1,n)}^t$	$= [t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}]$	Korrelatenvektor für die Bedingungsgleichungen zwischen den Verbesserungen und den ausgeglichenen Beobachtungen
$\mathbf{P}_{(n,n)}$	$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$	symmetrische Gewichtsmatrix der Beobachtungen
$\underline{l}_{(1,n)}^t$	$= [l_1, l_2, \dots, l_n]$	Vektor der Beobachtungen
$\underline{c}_{1(1,r1)}^t$	$= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r1}]$	Sollwerte für die Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen
$\underline{c}_{2(1,r2)}^t$	$= [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r2}]$	Sollwerte für die Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten
$\underline{c}_{3(1,r3)}^t$	$= [c_{31}, c_{32}, \dots, c_{3r3}]$	Sollwerte für die Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekannten
$\underline{g}_1^t(\bar{\mathbf{L}})_{(1,r1)}$	$= [g_{11}(\bar{\mathbf{L}}), g_{12}(\bar{\mathbf{L}}), \dots, g_{1r1}(\bar{\mathbf{L}})]$	Vektor der Funktionen für die Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen
$\underline{g}_2^t(\underline{\mathbf{x}})_{(1,r2)}$	$= [g_{21}(\underline{\mathbf{x}}), g_{22}(\underline{\mathbf{x}}), \dots, g_{2r2}(\underline{\mathbf{x}})]$	Vektor der Funktionen für die Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten
$\underline{g}_3^t(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{L}})_{(1,r3)}$	$= [g_{31}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{L}}), g_{32}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{L}}), \dots, g_{3r1}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{L}})]$	Vektor der Funktionen für die Bedingungsgleichungen zwischen Unbekannten und den ausgeglichenen Beobachtungen
$\underline{x}_{0(1,m)}^t$	$= [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]$	Vektor der Näherungswerte bzw. der Ausgangsgeometrie
$\underline{f}^t(\underline{\mathbf{x}})_{(1,n)}$	$= [f_1(\underline{\mathbf{x}}), f_2(\underline{\mathbf{x}}), \dots, f_n(\underline{\mathbf{x}})]$	Vektor der Funktionen für die Bedingungsgleichungen zwischen ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekannten
$\underline{p}_{(1,m)}^t$	$= [p_1, p_2, \dots, p_m]$	Vektor gegebener Konstanten.

Das Potential Φ setzt sich also aus verschiedenen Anteilen zusammen. Der Anteil (α) ist in der Ausgleichsrechnung die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen; er ist im allgemeinen positiv. In Ausnahmefällen - bei fehlerfreien Messungen oder fehlender Redundanz - ist dieser Anteil identisch Null. Die Anteile (β) und (γ) liefern keinen Beitrag zur Energie, da die Unbekanntengruppen \underline{q} und \underline{t} Veränderliche sind und die Ableitungen nach diesen Größen zu Null gesetzt werden. Auf diese Weise entstehen die Bedingungsgleichungen, unter welchen die Energie minimal werden soll. Man bezeichnet sie üblicherweise als Nebenbedingungen. Die Anteile (β_1), (β_2) und (β_3) sind die Bedingungsgleichungen, die in der Ausgleichsrechnung angesetzt werden. An diesen Bedingungsgleichungen fällt dem mit der Thematik Befasstem sofort auf, daß die dritte Bedingungsgleichung (β_3) so allgemein formuliert ist, daß die ersten und zweiten Gleichungen (β_1) und (β_2) eigentlich entfallen könnten. Daß dennoch drei Arten von Bedingungsgleichungen aufgestellt werden, liegt einfach daran, daß dadurch die klassischen Ausgleichsansätze sehr einfach zu formulieren sind. Die Bedingungsgleichungen (γ_1) und (γ_2) werden im allgemeinen nicht aufgestellt. Dies ist dann möglich, wenn man die Verbesserungen direkt in den Unbekannten \underline{x} und die ausgeglichenen Beobachtungen nach der Bestimmung der Verbesserungen ermittelt. Hier jedoch werden sie nicht nur aus formalen Gründen mitgeführt, sondern auch deshalb, weil sie bei der Übertragung auf Problemstellungen nichtgeodätischer Natur eine physikalische Bedeutung erlangen können. Der Anteil δ ist in der Ausgleichsrechnung im allgemeinen nicht vorhanden.

Der Vektor \underline{p} ist in diesem Fall der Nullvektor; er soll hier Verwendung finden, denn in vielen anderen Verfahren zur Berechnung netzartiger Strukturen kommt dem Anteil (δ) eine besondere Bedeutung zu. In der Statik z.B. handelt es sich um das Potential der äußeren Lasten. Darauf wird später sehr viel genauer eingegangen.

Das Gesamtpotential Φ wird stationär, wenn die Ableitungen nach den Unbekannten identisch Null verschwinden. Die Differentiation nach den Veränderlichen ergibt die Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= -\frac{\partial \underline{g}_2(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{q}_2 - \frac{\partial \underline{g}_3(\underline{x}, \bar{l})}{\partial \underline{x}} \underline{q}_3 + \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{t}_1 - \underline{p} = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} &= \underline{Pv} - \underline{t}_1 - \underline{t}_2 = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{l}} &= -\frac{\partial \underline{g}_1(\bar{l})}{\partial \bar{l}} \underline{q}_1 - \frac{\partial \underline{g}_3(\underline{x}, \bar{l})}{\partial \bar{l}} \underline{q}_3 + \underline{t}_2 = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}_1} &= -(\underline{g}_1(\bar{l}) - \underline{c}_1) = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}_2} &= -(\underline{g}_2(\underline{x}) - \underline{c}_2) = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}_3} &= -(\underline{g}_3(\underline{x}, \bar{l}) - \underline{c}_3) = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{t}_1} &= -(\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{t}_2} &= -(\underline{l} + \underline{v} - \bar{l}) = \underline{0}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die in der Regel nichtlinearen Gleichungen werden nun gelöst, indem sogenannte Startwerte für die Unbekannten \underline{y} eingeführt werden. An den Stellen dieser Näherungswerte \underline{y}_0 werden nun die Funktionen der Unbekannten nach Taylor entwickelt, wobei die Entwicklung nach dem ersten Glied abgebrochen wird

$$\underline{f}(\underline{y}) = \underline{f}(\underline{y}_0) + \left[\frac{\partial \underline{f}(\underline{y}_0)}{\partial \underline{y}} \right] \underline{\Delta y} = \underline{0}. \tag{2.12}$$

Nach Newton ergibt sich die Lösung in einem iterativen Prozeß, in welchem die Rohwerte nach jedem Rechenschritt j mit Zuschlägen $\underline{\Delta y}_j$ beaufschlagt werden, bis schließlich z.B. der Betrag von $\underline{\Delta y}_j$ identisch Null verschwindet oder aufgrund der beschränkten Rechengenauigkeit ein Abbruchkriterium unterschreitet. Die durchgreifende Kontrolle besteht natürlich einfach darin, die Unbekannten in die Funktion einzusetzen und $\underline{f}(\underline{y}) = \underline{0}$ zu überprüfen.

$$\underline{y}_j = \underline{y}_{j-1} + \underline{\Delta y}_j = \underline{y}_{j-1} - \left[\frac{\partial \underline{f}(\underline{y}_j)}{\partial \underline{y}} \right]^{-1} \underline{f}(\underline{y}_{j-1}). \tag{2.13}$$

Das vorgestellte allgemeine Ausgleichungskonzept kann nun auf die klassischen Verfahren der Ausgleichsrechnung übertragen werden. Dies soll im folgenden für

1. die vermittelnde Ausgleichung
2. die bedingte Ausgleichung
3. die vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten
4. die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten

geschehen.

2.2.1 Ausgleichsrechnung nach vermittelnden Beobachtungen

Wendet man nun die Grundgleichung (2.10) der Ausgleichsrechnung auf die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen an, so hat man zunächst durch Streichen der Terme (β) , (γ_2) und (δ) das für dieses Verfahren gültige Potential Φ aufzustellen; die unbekannte Korrelate \underline{t}_1 der Grundgleichung der Ausgleichsrechnung (2.10) wird hier der Einfachheit halber mit \underline{t} bezeichnet. Das für dieses Verfahren gültige Potential lautet somit

$$\Phi(\underline{x}, \underline{v}, \underline{t}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{P} \underline{v} - \underline{t}^t (\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})). \quad (2.14)$$

Φ wird stationär, wenn die Ableitungen von Φ nach den Unbekannten verschwinden, wenn also folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{t} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{P} \underline{v} - \underline{t} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{t}} &= -(\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Im folgenden soll kurz erklärt werden, wie die Bezeichnung dieses Ausgleichungsansatzes entstanden ist. Hierfür richten wir das Augenmerk auf die dritte Gleichung des obigen Gleichungssystems und schreiben zur Verdeutlichung ausführlich

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= l_1 + v_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \bar{l}_2 &= l_2 + v_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{l}_n &= l_n + v_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (2.16)$$

In die Grundgleichung des allgemeinen Ansatzes (γ_2) sind die Gleichungen (2.16) aufgenommen. Dabei sind \bar{l} die ausgeglichenen Beobachtungen. In den sogenannten Fehlergleichungen werden die (ausgeglichenen) Beobachtungen durch die Unbekannten ausgedrückt, so daß man sie *(ver)mittels* der Unbekannten miteinander vergleichen kann. Die auftretenden Messungswidersprüche werden dabei mit der Forderung - gewogene Quadratsumme der Verbesserungen zum Minimum - beseitigt. Man bezeichnet diese Art der Ausgleichung auch als Gauß-Markoff-Modell [50]. Bei diesem Ansatz sind zwei Sachverhalte erwähnenswert. Erstens: für jede Beobachtung ist eine Verbesserungsgleichung aufzustellen; zweitens: es sind so viele Unbekannte einzuführen, wie notwendig und hinreichend sind, um alle Beobachtungen miteinander zu verknüpfen. Zurück zum Ansatz nach Gleichung (2.14). In ihm können die Korrelaten \underline{t} direkt aus der zweiten Gleichung (2.15) bestimmt werden. Sie werden in die erste Gleichung (2.15) eingesetzt. Man erhält sodann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{P} \underline{v} = \underline{0}. \quad (2.17)$$

Die Verbesserungen \underline{v} können direkt aus der dritten Gleichung von (2.15) bestimmt werden. Es ergibt sich demnach für die Gleichung (2.17)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{P} (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}) = \underline{0}. \quad (2.18)$$

Für die sogenannte Jakobimatrix schreibt man üblicherweise $\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} := \mathbf{A}$. Unter Verwendung der Identität $\underline{h}(\underline{x}) := \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}}$ und nach der Formel (2.13) ergibt sich das für die Bestimmung der Unbekannten

\underline{x} gewohnte Verfahren

$$\underline{x}_j = \underline{x}_{j-1} + \underline{\Delta x}_j = \underline{x}_{j-1} - \left[\frac{\partial \underline{h}(\underline{x}_{j-1})}{\partial \underline{x}} \right]^{-1} \underline{h}(\underline{x}_{j-1}). \quad (2.19)$$

Es wird ganz unabhängig davon, ob es sich bei Vektorgleichung (2.18) um lineare oder nichtlineare Beziehungen handelt, benutzt. Im folgenden werden aus Gründen der Allgemeingültigkeit stets nichtlineare Zusammenhänge vorausgesetzt. Das Problem nichtlinearer Gleichungssysteme wird sehr allgemein in [93] behandelt. Die Ableitung von $\underline{h}(\underline{x})$ nach den Unbekannten \underline{x} an der Entwicklungsstelle $j - 1$, wobei j die Anzahl der berechneten Iterationen der nichtlinearen Berechnung bedeutet, und für $j = 1$ mit den Näherungswerten \underline{x}_0 gestartet wird, soll in aller Ausführlichkeit gezeigt werden. Die Anwendung der Kettenregel ist zu beachten (siehe z.B. Linkwitz [62])

$$\frac{\partial \underline{h}(\underline{x}_j)}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x}_j)}{\partial \underline{x}} \right)^t}_{\text{const.}} \mathbf{P}(\underline{f}(\underline{x}_j) - \underline{l}) \right] + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x}_j)}{\partial \underline{x}} \right)^t \underbrace{\mathbf{P}(\underline{f}(\underline{x}_j) - \underline{l})}_{\text{const.}} \right]. \quad (2.20)$$

Der zweite Teil der Gleichung (2.20) wird in aller Regel vernachlässigt, da der konstante Anteil $(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l})$ der Verbesserung \underline{v} entspricht, die im allgemeinen klein ist. Darüberhinaus verschwinden bei linearen Zusammenhängen die zweiten Ableitungen von $\underline{f}(\underline{x})$ nach den Unbekannten \underline{x} .

Hier nun wollen wir von der Existenz der zweiten Ableitungen ausgehen und den zweiten Teil der Gleichung (2.20) etwas genauer betrachten; der erste Teil ist der von der linearen Berechnung bekannte Ausdruck $\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}$ der Normalgleichungen. Der zweite Teil wird mit der Matrix \mathbf{Z} bezeichnet; er lautet - unter der Voraussetzung, daß das Produkt $\mathbf{P}(\underline{f}(\underline{x}_j) - \underline{l})$ mit dem Vektor \underline{s} bezeichnet wird -

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\partial \underline{f}_1(\underline{x})}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial \underline{f}_2(\underline{x})}{\partial x_1} s_2 + \dots + \frac{\partial \underline{f}_n(\underline{x})}{\partial x_1} s_n \right) &= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_1(\underline{x}) \\ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\partial \underline{f}_1(\underline{x})}{\partial x_2} s_1 + \frac{\partial \underline{f}_2(\underline{x})}{\partial x_2} s_2 + \dots + \frac{\partial \underline{f}_n(\underline{x})}{\partial x_2} s_n \right) &= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_2(\underline{x}) \\ \dots & \\ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\partial \underline{f}_1(\underline{x})}{\partial x_m} s_1 + \frac{\partial \underline{f}_2(\underline{x})}{\partial x_m} s_2 + \dots + \frac{\partial \underline{f}_n(\underline{x})}{\partial x_m} s_n \right) &= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} g_m(\underline{x}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Kompakter geschrieben erhalten wir

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \underline{g}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(\underline{x})}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(\underline{x})}{\partial x_m} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Mithin gilt, wenn man also für den zweiten Anteil der Ableitungen die Matrix \mathbf{Z} setzt

$$\underline{\Delta x}_j = \underline{x}_j - \underline{x}_{j-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}(\underline{f}(\underline{x}_{j-1}) - \underline{l}). \quad (2.23)$$

Im folgenden soll das Augenmerk auf die Matrix \mathbf{Z} gerichtet werden, denn im allgemeinen wird diese Matrix \mathbf{Z} bei diesem Ausgleichungskonzept unterschlagen. Auf diese Tatsache haben Linkwitz, Schek,

Gründig und Bahndorf ([64], [65], [86], [88], [34], [37], [5]) hingewiesen. Dort konnte gezeigt werden, daß die Berücksichtigung der zweiten Ableitungen bei der Seilnetzrechnung etwa die entscheidende Rolle spielt, wohingegen sie bei geodätischen Netzen zu keiner Beschleunigung der Konvergenz führt. Somit drängt sich sofort die Frage auf, ob man \mathbf{Z} bei der Suche nach der Lösung zu berücksichtigen hat. Eine Zerlegung von \mathbf{Z} in Eigenwerte \mathbf{D} mit den dazugehörigen Eigenvektoren \mathbf{S} hilft bei der Beantwortung weiter

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}^t \mathbf{D} \mathbf{S}. \quad (2.24)$$

Die folgenden Vereinbarungen sind zum Verständnis unerlässlich. n_{pos} Eigenwerte d_{pos} seien positiv, n_{null} Eigenwerte d_{null} seien null und n_{neg} Eigenwerte d_{neg} seien negativ. Imaginäre Eigenwerte sind bei symmetrischen Matrizen, \mathbf{Z} ist symmetrisch, nicht möglich. Die Eigenwerte werden in Diagonalmatrizen \mathbf{D}_{pos} , \mathbf{D}_{null} , \mathbf{D}_{neg} angeordnet, und die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{s}_{\text{pos}}$, $\underline{s}_{\text{null}}$, $\underline{s}_{\text{neg}}$ spaltenweise in den Matrizen \mathbf{S}_{pos} , \mathbf{S}_{null} und \mathbf{S}_{neg} . Damit kann \mathbf{Z} wie folgt geschrieben werden

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_{\text{pos}}^t \mathbf{D}_{\text{pos}} \mathbf{S}_{\text{pos}} + \mathbf{S}_{\text{null}}^t \mathbf{D}_{\text{null}} \mathbf{S}_{\text{null}} + \mathbf{S}_{\text{neg}}^t \mathbf{D}_{\text{neg}} \mathbf{S}_{\text{neg}}. \quad (2.25)$$

Der mittlere Anteil von (2.25) ist natürlich identisch Null und kann im folgenden außer acht gelassen werden. Der erste Anteil, der aus den positiven Eigenwerten aufgebaut wird, entspricht gewissermaßen n_{pos} Verbesserungszeilen $\underline{s}_{\text{pos}}$ mit positiven Gewichten d_{pos} . Man gewinnt durch die Hinzunahme dieser zusätzlichen Gleichungen also Redundanz (n_{pos}). An der rechten Seite des Gleichungssystemes (2.23) verändert sich nichts, d.h. die fiktiven Beobachtungen, welche den Redundanzgewinn ermöglichen, sind identisch Null. Beim Anteil \mathbf{Z}_{neg} ist es genau umgekehrt. Die Hinzunahme dieser Fehlergleichungen verschlechtert die Kondition der Normalgleichungsmatrix. Man entnimmt sozusagen Redundanz (n_{neg}). Aufgrund der Tatsache, daß bei geodätischen Anwendungen die Verbesserungen mit derselben Häufigkeit positiv wie negativ sind, und die zu untersuchende Matrix \mathbf{Z} linear von den Verbesserungen abhängt, sind die Eigenwerte ebenso gleich wahrscheinlich positiv wie negativ. In diesem Fall bringt die Mitnahme der Matrix \mathbf{Z} nichts, was Untersuchungen bei geodätischen Strecken- und Richtungsnetzen [88] auch ergeben haben. Unter der Voraussetzung, daß die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen, wie z.B. in mechanischen Systemen, die innere Energie darstellt, und die Verbesserungen somit keine stichprobenartig gewonnenen Meßwerte korrigieren, kommt es vor, daß bei der Eigenwertzerlegung keine negativen Eigenwerte auftreten. Ein Beispiel hierfür sind vorgespannte Seilnetze, deren Seile in jedem Lastfall gespannt bleiben. In diesem Fall gewinnt man durch das Hinzufügen dieser zweiten Ableitungen Redundanz. Eine Lösung der Normalgleichungen ohne diese Anteile ist unter Umständen unmöglich. Aber auch bei der Ausgleichung geodätischer Meßanordnungen kann es sehr hilfreich sein, die positiven Anteile \mathbf{Z}_{pos} mitzunehmen, um z.B. bei schlechten Rohwerten den Konvergenzradius zu erhöhen. Es wurde gezeigt, daß die Hinzunahme von \mathbf{Z}_{pos} zusätzlichen Verbesserungsgleichungen mit jeweils positiven Gewichten entspricht. Für die folgenden Beziehungen bleibt \mathbf{Z}_{pos} nicht unberücksichtigt. Man denke sich diesen Anteil durch n_{pos} zusätzliche Verbesserungszeilen entstanden. Es soll gelten

$$\mathbf{A}_{\text{neu}}^t \mathbf{P}_{\text{neu}} \mathbf{A}_{\text{neu}} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Z}_{\text{pos}} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{S}_{\text{pos}}^t \mathbf{D}_{\text{pos}} \mathbf{S}_{\text{pos}}. \quad (2.26)$$

An dieser Stelle soll ein weiterer Gedankengang, der das oben beschriebene Vorgehen bestätigt, skizziert werden. Er bezieht sich auf die sogenannten Redundanzanteile, deren Summe - wie später ausführlich gezeigt wird - der Gesamtredundanz zu entsprechen hat. Jeder Beobachtung bzw. jeder Verbesserungszeile wird dabei ein Anteil an der Gesamtredundanz zugeordnet; aus diesem Grund muß die Normalgleichungsmatrix ausschließlich mit Verbesserungszeilen in der Form $\underline{a}^t \underline{p} \underline{a}$ bzw. $\underline{s}^t \underline{d} \underline{s}$ aufgebaut werden; eben deshalb, damit die Redundanzanteile den Verbesserungszeilen bzw. Beobachtungen zuzuordnen sind. Nur in diesem Fall ergibt die Summe der Redundanzanteile die Gesamtredundanz. Wenn man die zweiten Ableitungen direkt, d.h. ohne sie in Eigenwerte und -vektoren zu zerlegen, in die gesamte Normalgleichungsmatrix aufnehmen würde, hätte dies zur Folge, daß die Summe der Einzelredundanzen mit der Gesamtredundanz nicht übereinstimmen würde, denn die Normalgleichungsmatrix

würde ja in diesem Fall nicht ausschließlich mit Fehlergleichungen aufgebaut. Nach der Zerlegung der zweiten Ableitungen werden allerdings nur die Eigenvektoren, d.h. die Verbesserungs- bzw. Fehlergleichungszeilen berücksichtigt, deren Gewichte positiv sind. Für die Gewichtsmatrix ist nämlich positive Definitheit Voraussetzung; die Bestimmung von Redundanzanteilen, deren Beobachtungen negative Gewichte aufweisen, ist nicht erlaubt.

Für die nachfolgenden Untersuchungen wird der Zusatz *neu* an der Jakobi- und Gewichtsmatrix aus Gründen der Übersichtlichkeit unterschlagen. Somit ergibt sich für die Zuschläge $\underline{\Delta x}$ zu den Unbekannten \underline{x}

$$\underline{\Delta x}_j = \underline{x}_j - \underline{x}_{j-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} (f(\underline{x}_{j-1}) - \underline{l}). \quad (2.27)$$

Die Lösung des Gleichungssystemes erhält man nun, indem man die Gleichung (2.27) mit jeweils neu aufgebauter Jakobimatrix \mathbf{A}^t so lange wiederholt, bis alle $\underline{\Delta x}$ verschwinden bzw. bis ein Abbruchkriterium unterschritten wird. Die durchgreifende Kontrolle lautet auch hier: $\mathbf{A}^t \mathbf{P} (f(\underline{x}_j) - \underline{l}) = \underline{0}$. Siehe z.B. [106] oder [47]. Für die ausgeglichenen Beobachtungen \bar{l} gilt

$$\bar{l} = \underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_{j-1}) + \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}_{j-1})}{\partial \underline{x}} \underline{\Delta x}_j. \quad (2.28)$$

Die allgemein übliche Schreibweise für die linearen Fehlergleichungen sieht aus wie folgt

$$\underline{v} = \mathbf{A} \underline{\Delta x} - (\underline{l} - \underline{f}(\underline{x}_{j-1})). \quad (2.29)$$

Die Verwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ermöglicht die Berechnung von Kofaktoren der einzelnen Größen, die in den einschlägigen Abhandlungen zur Ausgleichsrechnung in aller Ausführlichkeit beschrieben sind. An dieser Stelle soll das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz dazu benützt werden, die sogenannten Redundanzanteile einzuführen, welche sich bei der Berechnung von geodätischen Netzen als überaus nützlich erwiesen haben. Erstmals werden diese Größen (data-snooping) bei Baarda [4] erwähnt; [1] und [24] behandeln diese Thematik in unserer Schreibweise.

Für das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz gilt für eine Funktion $\underline{k} = \underline{k}(\underline{u})$ mit der als bekannt vorausgesetzten Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{\underline{u}, \underline{u}}$. Die Kofaktorenmatrix ergibt sich aus

$$\mathbf{Q}_{\underline{k}, \underline{k}} = \left(\frac{\partial \underline{k}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \right) \mathbf{Q}_{\underline{u}, \underline{u}} \left(\frac{\partial \underline{k}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \right)^t. \quad (2.30)$$

Für eine weitere Funktion $\underline{h} = \underline{h}(\underline{u})$ kann ganz analog die gemischte Kofaktorenmatrix bestimmt werden, und zwar

$$\mathbf{Q}_{\underline{k}, \underline{h}} = \left(\frac{\partial \underline{k}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \right) \mathbf{Q}_{\underline{u}, \underline{u}} \left(\frac{\partial \underline{h}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \right)^t. \quad (2.31)$$

Für die Kofaktoren der Inkremente $\underline{\Delta x}$ der Unbekannten gilt demnach, unter Verwendung der Tatsache, daß $\mathbf{Q}_{\underline{l}, \underline{l}}$ der inversen Gewichtsmatrix, also \mathbf{P}^{-1} , entspricht

$$\mathbf{Q}_{\underline{\Delta x}, \underline{\Delta x}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{Q}_{\underline{l}, \underline{l}} \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.32)$$

Die linearisierten Fehlergleichungen (2.29) ergeben sich mit der Abkürzung $\tilde{l} = -\underline{f}(\underline{x}) + \underline{l}$ zu

$$\underline{v} = \mathbf{A} \underline{\Delta x} - \tilde{l} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \tilde{l} - \tilde{l}. \quad (2.33)$$

Der Vektor der Verbesserungen kann demnach wie folgt ausgedrückt werden

$$\underline{v} = -(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \tilde{l}, \quad (2.34)$$

wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix ist. \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_0^* sind wie folgt definiert

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{A}_0^* = \mathbf{E} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}. \quad (2.36)$$

Im folgenden soll kurz auf einige bemerkenswerte Eigenschaften der Matrix \mathbf{A}_0 eingegangen werden. \mathbf{A}_0 ist idempotent, d.h., $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^n$; aus dieser Eigenschaft folgt sofort, daß $(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)$, also \mathbf{A}_0^* , ebenso idempotent ist. Darüberhinaus sind die Eigenwerte von \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_0^* allesamt 0 oder 1. Auf eine weitere interessante Tatsache soll an dieser Stelle hingewiesen werden. Von Gleichung (2.34) ausgehend, wird umgeformt

$$\underline{v} = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{E}) \tilde{\underline{l}} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \underline{v} = \mathbf{A}_0^* \underline{v} = -\mathbf{A}_0^* \tilde{\underline{l}}, \quad (2.37)$$

und damit

$$\mathbf{A}_0 \underline{v} = \underline{0}. \quad (2.38)$$

An der Gleichung (2.38) erkennt man, daß die Verbesserungen der Beobachtungen \underline{l} Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A}_0^* sind. Der dazugehörige Eigenwert ist 1. Gleichzeitig sind die Verbesserungen Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A}_0 mit dem Eigenwert 0, wie man leicht aus Gleichung (2.38) erkennt.

Von besonderer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang die Spuren der Matrizen \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_0^* . Die Spur von \mathbf{A}_0 ergibt sich aus der Tatsache, daß $sp(\mathbf{A}\mathbf{B}) = sp(\mathbf{B}\mathbf{A})$. Man erhält sofort

$$sp(\mathbf{A}_0) = sp(\mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}) = sp(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}) = sp \mathbf{E} = m, \quad (2.39)$$

wobei m die Anzahl der Unbekannten darstellt. Da $sp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = sp(\mathbf{A}) + sp(\mathbf{B})$ berechnet sich die Spur der Matrix \mathbf{A}_0^* , deren Dimension n ist, also der Anzahl der Beobachtungen, zu

$$sp \mathbf{A}_0^* = sp(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0) = sp(\mathbf{E}) - sp(\mathbf{A}_0) = n - m. \quad (2.40)$$

Die Spur von \mathbf{A}_0^* entspricht demnach der Redundanz $r = n - m$ der Ausgleichungsaufgabe.

Nun zurück zur Gleichung (2.34). Sie stellt den Zusammenhang her zwischen den Verbesserungen \underline{v} und dem gekürzten Beobachtungsvektor $\tilde{\underline{l}}$. Nach Einführung grober Beobachtungsfehler $\underline{\nabla} \underline{l}$, die mit einem neuen Beobachtungsvektor wie folgt verknüpft sind $\underline{l}_n = \underline{l} + \underline{\nabla} \underline{l}$, ergibt sich als Differenz der Verbesserungen \underline{v}_n aus den neuen Beobachtungen \underline{l}_n und den Verbesserungen \underline{v} der alten Beobachtungen \underline{l} folgender Ausdruck

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \underline{v}_n - \underline{v} = -\mathbf{A}_0^* \underline{\nabla} \tilde{\underline{l}}, \quad (2.41)$$

wobei $\underline{\nabla} \tilde{\underline{l}}$ die Differenz der gekürzten Beobachtungsvektoren darstellt. Es soll ausdrücklich angemerkt werden, daß der neue Beobachtungsvektor aus dem alten durch Addition mit dem die groben Beobachtungsfehler beinhaltenden Fehlervektor $\underline{\nabla} \underline{l}$ entstanden ist. Für eben diese Differenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \tilde{\underline{l}} = \tilde{\underline{l}}_n - \tilde{\underline{l}} &= (-\underline{f}(\underline{x}_n) + \underline{l}_n) - (-\underline{f}(\underline{x}) + \underline{l}) = (-\underline{f}(\underline{x}_n) + \underline{l} + \underline{\nabla} \underline{l}) - (-\underline{f}(\underline{x}) + \underline{l}) \\ &= -\underline{f}(\underline{x}_n) + \underline{f}(\underline{x}) + \underline{\nabla} \underline{l}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Für die Differenz der Verbesserungen ergibt sich damit

$$\underline{\nabla} \underline{v} = -\mathbf{A}_0^* (-\underline{f}(\underline{x}_n) + \underline{f}(\underline{x}) + \underline{\nabla} \underline{l}) = -\mathbf{A}_0^* \underline{\nabla} \underline{l}, \quad (2.43)$$

unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x}_n) = \mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x})$. Der Beweis für diese Identität gelingt mit dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz. Zunächst ist ein Vektor einzuführen, und zwar $\underline{y} = \mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x})$. Man erhält unmittelbar aus

$$\underline{y} = \mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x}) \quad (2.44)$$

die Ableitungen nach den Beobachtungen \underline{l} zu

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{l}} = \mathbf{A}_0^* \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{l}}. \quad (2.45)$$

Die Jakobimatrix des Funktionenvektors $\underline{f}(\underline{x})$ nach den Beobachtungen \underline{l} ist zu bestimmen. Wir erhalten zunächst

$$\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{l}} = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{l}} = \mathbf{A} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{l}}. \quad (2.46)$$

Nun wird die Gleichung (2.46) in (2.45) eingesetzt

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{l}} = \mathbf{A}_0^* \mathbf{A} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{l}} = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

wobei von der Tatsache, daß das Produkt $\mathbf{A}_0^* \mathbf{A}$ identisch Null verschwindet, ausgegangen wird, denn

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^* \mathbf{A} &= (\mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \mathbf{A} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}) \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Somit gilt für die Kofaktorenmatrix des Vektors \underline{y} und den Beobachtungen \underline{l}

$$\mathbf{Q}_{\underline{y}, \underline{l}} = \mathbf{0}. \quad (2.49)$$

Mit anderen Worten: die Beobachtungen \underline{l} und das Produkt $\mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x})$ sind voneinander unabhängig. Für beliebige \underline{x} bleibt der Vektor \underline{y} konstant. Die Gültigkeit von

$$\mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x}_n) = \mathbf{A}_0^* \underline{f}(\underline{x}). \quad (2.50)$$

ist bewiesen. Es gilt demnach uneingeschränkt

$$\nabla v = -\mathbf{A}_0^* \nabla \underline{l}. \quad (2.51)$$

Die obige Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen den Änderungen der Verbesserungen und den groben Fehlern $\nabla \underline{l}$ her, die an den ursprünglichen Beobachtungen angebracht worden sind. Von einer gewissen Bedeutung erscheint in diesem Zusammenhang, daß die groben Fehler keinesfalls auf einzelne Beobachtungen beschränkt sind. Alle ursprünglichen Beobachtungen können durch grobe Fehler verfälscht werden. Sehr viel einfacher und praktikabler wird der Sachverhalt, wenn davon ausgegangen wird, daß nur *ein* grober Fehler, etwa ∇l_i in der Beobachtung l_i , auftreten soll. In diesem Fall kommt den Hauptdiagonalelementen der Matrix \mathbf{A}_0^* , sie werden mit $\mathbf{A}_{0(ii)}^* = r_i$ für die *ite* Beobachtung bezeichnet, eine besondere Bedeutung zu. Sie geben an, wieviel diese Beobachtung zur Gesamtredundanz r beiträgt. Der übliche Ausdruck für dieses Hauptdiagonalelement r_i ist Redundanzanteil der Beobachtung i

$$\nabla v_i = -r_i \nabla l_i. \quad (2.52)$$

Aus der Gleichung (2.40) wissen wir, daß die Spur von \mathbf{A}_0^* der Gesamtredundanz entspricht, also: die Summe der Redundanzanteile ergibt die Gesamtredundanz

$$\sum r_i = r. \quad (2.53)$$

Die neue ausgeglichene Beobachtung \bar{l}_{n_i} der Beobachtung l_i , die mit dem groben Fehler ∇l_i behaftet ist, ergibt sich nach kurzer Umformung aus

$$\bar{l}_{n_i} = l_i + v_i + (1 - r_i)\nabla l_i = \bar{l}_i + (1 - r_i)\nabla l_i. \quad (2.54)$$

Hieraus lassen sich eine ganze Reihe von Schlußfolgerungen ziehen. Wenn der Redundanzanteil einer Beobachtung den Maximalwert 1 annimmt, zeigt sich ein etwaiger grober Beobachtungsfehler der Beobachtung direkt in der Verbesserung. Eine (zu) große Verbesserung deutet demnach auf einen Beobachtungsfehler in dieser Beobachtung hin. Die Beobachtung ist voll kontrolliert; allerdings trägt sie nichts zur Bestimmung der Unbekannten bei. Wenn der Redundanzanteil der Beobachtung dagegen den Minimalwert 0 annimmt, kann ein grober Beobachtungsfehler dieser Beobachtung nicht aufgedeckt werden. Die Beobachtung ist völlig unkontrolliert; sie trägt nur zur Bestimmung der Unbekannten bei. Innerhalb dieser Extreme bewegen sich die Redundanzanteile. Wünschenswert sind meiner Ansicht nach Redundanzanteile, die alle ungefähr gleich groß sind. Dies ist natürlich nicht immer möglich, denn in den Redundanzanteilen zeigt sich die geometrische Konfiguration. Grobe Fehler sind dann leicht in der größten Verbesserung aufzudecken. Die Beobachtungen tragen gleichmäßig zur Bestimmung der Unbekannten und zur Kontrolle der Beobachtungen bei.

2.2.2 Ausgleichsrechnung nach bedingten Beobachtungen

Wenn man bei der Grundgleichung (2.10) der Ausgleichsrechnung die Terme (β_2) , (β_3) , (γ_1) und (δ) außer Betracht läßt und die Bedingungsgleichung (γ_2) direkt ersetzt, weiterhin die verbleibende Korrelate mit \underline{q} , den funktionalen Zusammenhang zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen mit $\underline{g}(\underline{l} + \underline{v})$ und die Sollwerte der Bedingungsgleichungen mit \underline{c} bezeichnet, so erhält man das Potential für die bedingte Ausgleichung (siehe z.B [54])

$$\Phi(\underline{v}, \underline{q}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{P} \underline{v} - \underline{q}^t (\underline{g}(\underline{l} + \underline{v}) - \underline{c}). \quad (2.55)$$

Φ wird stationär, wenn die Ableitungen von Φ nach den Veränderlichen verschwinden, wenn nach dem Transponieren also folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{P} \underline{v} - \left(\frac{\partial \underline{g}(\underline{l} + \underline{v})}{\partial \underline{v}} \right)^t \underline{q} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} &= -(\underline{g}(\underline{l} + \underline{v}) - \underline{c}) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

An dieser Stelle wird auf die zweite Gleichung des obigen Systemes näher eingegangen. Nach der Einführung der ausgeglichenen Beobachtungen $\bar{l}_i = l_i + v_i$ ergibt sich ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} \underline{g}_1(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) &= c_1 \\ \underline{g}_2(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) &= c_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{g}_r(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) &= c_r. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Bei dieser Methode sind nun die Verbesserungen bzw. die ausgeglichenen Beobachtungen so zu bestimmen, daß den obigen *Bedingungen* zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen Genüge getan wird. Dabei ist gleichzeitig der Hauptforderung - gewogene Quadratsumme der Verbesserungen zum Minimum - nachzukommen.

Man setzt im allgemeinen $\frac{\partial g(\underline{l} + \underline{v})}{\partial \underline{v}} := \mathbf{B}^t$. Damit ergibt sich für die linearisierten Gleichungen nach (2.56) und nach der Einführung von Startwerten

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \underline{\Delta v}_j - \mathbf{B} \underline{\Delta q}_j &= -(\mathbf{P} \underline{v}_{j-1} - \mathbf{B} \underline{q}_{j-1}) \\ \mathbf{B}^t \underline{\Delta v}_j &= (\underline{g}(\underline{l} + \underline{v}) - \underline{c}). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Der Index j an den Vektoren soll in diesem Zusammenhang die Anzahl der bis dahin berechneten Iterationen bedeuten.

Nach einigem Umformen erhält man für die Zuschläge zu den unbekanntem Korrelaten $\underline{\Delta q}$ (in der Variationsrechnung werden die Korrelaten als Lagrangesche Multiplikatoren bezeichnet) und danach die für die unbekanntem Verbesserungen $\underline{\Delta v}$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta q}_j &= (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (-\underline{g}(\underline{l} + \underline{v}_{j-1}) + \underline{c} - \mathbf{B}^t \underline{v}_{j-1} - \mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \underline{q}_{j-1}) \\ \underline{\Delta v}_j &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\underline{q}_{j-1} + \underline{\Delta q}_j) - \underline{v}_{j-1}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

oder einfacher ausgedrückt

$$\begin{aligned} \underline{q}_j &= \underline{q}_{j-1} + \underline{\Delta q}_j = (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (-\underline{g}(\underline{l} + \underline{v}_{j-1}) + \underline{c} + \mathbf{B}^t \underline{v}_{j-1}) \\ \underline{v}_j &= \underline{v}_{j-1} + \underline{\Delta v}_j = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \underline{q}_j. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Der nichtlineare Berechnungsprozeß wird solange wiederholt, bis die Gleichungen nach (2.56) identisch Null verschwinden bzw. ein gewisses Abbruchkriterium unterschreiten. Im allgemeinen nichtlinearen Fall wird ein Iterationsschritt nicht ausreichen. In diesem Fall ist die Matrix \mathbf{B} erneut zu bestimmen, denn aufgrund der unbekanntem Verbesserungen bleibt \mathbf{B} nicht konstant. Weiterhin verändern sich mit den Iterationen die Verbesserungen \underline{v} , die zur Bestimmung der Korrelaten \underline{q} gebraucht werden. Bemerkenswert an dem gezeigten Ansatz ist die Tatsache, daß die rechte Seite bei der Berechnung der Korrelaten den Term $\mathbf{B}^t \underline{v}$ enthält. Schek zeigte, daß dieser Ansatz die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen streng minimiert [86]; aus diesem Grunde wird er als *strenge* least-squares-Lösung bezeichnet. Das übliche Verfahren, welches diesen Term vernachlässigt, heißt dort *weiche* least-squares-Lösung.

Im folgenden soll an dieser Stelle das Augenmerk auf den Zusammenhang zwischen den Verbesserungen und den Beobachtungen gelenkt werden. Setzt man die obigen Gleichungen ineinander ein, so erhält man unter Verwendung, daß die Bedingungsgleichungen im Konvergenzpunkt identisch Null erfüllt sind, unmittelbar

$$\underline{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^t \underline{v}. \quad (2.61)$$

Mit der Abkürzung

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^t \quad (2.62)$$

ergibt sich aus der Gleichung (2.61) sofort

$$\underline{v} = \mathbf{B}_0 \underline{v} = \mathbf{B}_0 (\bar{\underline{l}} - \underline{l}). \quad (2.63)$$

Wie bei der vermittelten Ausgleichung kann die Spur der Matrix \mathbf{B}_0 sehr einfach ermittelt werden.

$$sp(\mathbf{B}_0) = sp(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^t) = sp(\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1}) = sp \mathbf{E} = r, \quad (2.64)$$

wobei r die Anzahl der Bedingungsgleichungen und somit die Redundanz darstellt. Aus der Gleichung (2.61) folgt sofort für die Anteile der Verbesserungen $\underline{\nabla v}$ der Beobachtungen \underline{l} als Folge der groben Beobachtungsfehler $\underline{\nabla l}$, wobei \bar{l}_n der Vektor der *neuen* ausgeglichenen Beobachtungen darstellt, die sich aus den *neuen* Beobachtungen l_n ergeben haben. Es gilt somit $l_n = \underline{l} + \underline{\nabla l}$. In der nachfolgenden Gleichung wird eine Identität benützt, deren Gültigkeit noch zu beweisen sein wird, und zwar $B_0 \bar{l}_n = B_0 \bar{l}$

$$\underline{\nabla v} = B_0((\bar{l}_n - l_n) - (\bar{l} - l)) = B_0((\bar{l}_n - (l_n - \underline{\nabla l})) - (\bar{l} - l)) = -B_0 \underline{\nabla l}. \quad (2.65)$$

Der Beweis für $B_0 \bar{l}_n = B_0 \bar{l}$ ist nicht ganz einfach, soll aber hier nicht verschwiegen werden. Er gelingt mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Zunächst wird \underline{v} in Abhängigkeit von \bar{l} ausgedrückt

$$\begin{aligned} \underline{v} &= P^{-1} B(B^t P^{-1} B)^{-1} (B^t (\bar{l} - l) - \underline{g}(\bar{l}) + \underline{c}) \\ \underline{v} &= B_0((\bar{l} - l) - \underline{g}(\bar{l}) + \underline{c}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \bar{l}} = P^{-1} B(B^t P^{-1} B)^{-1} B^t - P^{-1} B(B^t P^{-1} B)^{-1} B^t = \mathbf{0}. \quad (2.67)$$

Dieses Resultat überrascht uns keinesfalls, denn die Kofaktorenmatrix zwischen den Verbesserungen \underline{v} und den Beobachtungen \underline{l} bei der bedingten Ausgleichung verschwindet. Also $Q_{v,l} = \mathbf{0}$. Aus der Gleichung (2.66) folgt für die Ableitungen der Verbesserungen \underline{v} nach den Beobachtungen \underline{l} unter Einbeziehung der obigen Gleichung

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{l}} = -B_0 + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \bar{l}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \underline{l}} = -B_0 + \mathbf{0} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \underline{l}} = -B_0. \quad (2.68)$$

An dieser Stelle wird der genauer zu betrachtende Vektor $\underline{y} = B_0 \bar{l}$ eingeführt, also

$$\underline{y} = B_0 \bar{l} = B_0 (l + \underline{v}) = B_0 l + B_0 \underline{v} = B_0 l + \underline{v} \quad (2.69)$$

und die Matrix der Ableitungen dieses Vektors nach den ausgeglichenen Beobachtungen \bar{l} gebildet

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial \bar{l}} = B_0 + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \bar{l}} = B_0 - B_0 = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

Die Kofaktorenmatrix zwischen dem Vektor \underline{y} und den Beobachtungen \underline{l} ist demnach

$$Q_{y,l} = \mathbf{0}. \quad (2.71)$$

Dies heißt nichts anderes, daß die Beobachtungen \underline{l} und das Produkt $B_0 \bar{l}$ voneinander unabhängig sind. Mit anderen Worten: der Vektor \underline{y} ist konstant bei jedem Satz von ausgeglichenen Beobachtungen \bar{l} . An dieser Stelle muß der Begriff Satz von ausgeglichenen Beobachtungen näher erläutert werden. Ein Satz - es gibt unendlich viele - von ausgeglichenen Beobachtungen erfüllt die Bedingungsgleichungen. Ein bestimmter Satz (Lösungssatz) minimiert die gewogene Quadratsumme der Verbesserungen. Somit gilt, daß \underline{y} konstant ist für verschiedene Sätze, also für verschiedene Vektoren \bar{l} . Diese Fakten sind gleichbedeutend mit

$$B_0 \bar{l}_n = B_0 \bar{l}. \quad (2.72)$$

Nun zurück zur Gleichung (2.65) und zur üblichen Annahme, daß lediglich ein kleiner grober Fehler ∇v_i an der beliebigen Beobachtung i angebracht wird. Weiterhin sollen die Hauptdiagonalelemente der Matrix \mathbf{B}_0 , sie werden mit $\mathbf{B}_{0(ii)} = r_i$ für bezeichnet, eingeführt werden. Damit erhält man

$$\nabla v_i = -\mathbf{B}_{0(ii)} \nabla l_i = -r_i \nabla l_i. \quad (2.73)$$

Die Gleichung (2.73) zeigt, welchen Einfluß der grobe Fehler auf die Verbesserung ausübt; oder allgemein, wie sich die Änderung einer Beobachtung auf das Ausgleichungsergebnis auswirkt. Im übrigen gilt

$$\sum r_i = r, \quad (2.74)$$

wie wir es vom vorigen Abschnitt kennen.

2.2.3 Ausgleichungsrechnung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten

Wendet man nun die Grundgleichung (2.10) der Ausgleichungsrechnung auf die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten an, so gelingt dies durch Streichen der Terme (β_1) , (β_3) , (γ_2) und (δ) . Zur Vermeidung tiefgestellter Zeiger wird weiterhin vereinbart, daß die für die Bedingungsgleichung (β_1) verbleibende Korrelate mit \underline{q} , der funktionale Zusammenhang zwischen den Unbekannten mit $\underline{g}(\underline{x})$, die Sollwerte für diese Gleichungen mit \underline{c} , die Korrelaten des Potentialanteiles γ_1 mit \underline{t} bezeichnet werden. Damit ergibt sich folgendes Potential Φ

$$\Phi(\underline{x}, \underline{v}, \underline{q}, \underline{t}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{P} \underline{v} - \underline{q}^t (\underline{g}(\underline{x}) - \underline{c}) - \underline{t}^t (\underline{l} + \underline{v} - f(\underline{x})). \quad (2.75)$$

Φ wird wiederum stationär, wenn die Ableitungen von Φ nach den Unbekannten verschwinden, wenn also folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= - \left(\frac{\partial \underline{g}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{q} + \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{t} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{P} \underline{v} - \underline{t} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} &= - (\underline{g}(\underline{x}) - \underline{c}) = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{t}} &= - (\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Die Bezeichnung für diese Ausgleichungsmethode ist leicht verständlich. Der vermittelnden Ausgleichungsrechnung werden die Bedingungsgleichungen $\underline{g}(\underline{x}) - \underline{c}$ hinzugefügt. Mitunter wird diese Art der Ausgleichung auch als Gauß-Markoff-Modell mit Restriktionen bezeichnet. Man erhält nach kurzem Umformulieren der obigen Gleichungen (2.76)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= - \left(\frac{\partial \underline{g}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{q} + \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{P} (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}) = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} &= - (\underline{g}(\underline{x}) - \underline{c}) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die nichtlinearen Gleichungen werden wie üblich linearisiert. Also ergibt sich für die unbekanntenen Vektoren $\underline{\Delta x}$ und $\underline{\Delta q}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{q}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{x}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta x} \\ \underline{\Delta q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Die für unseren Fall sich ergebenden Matrizen lauten wie folgt, wobei zu beachten ist, daß die Jakobmatrix \mathbf{C} keinesfalls mit der Kantenknotenmatrix verwechselt wird,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{P} \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} + \mathbf{Z} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Z} \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{q}} &= - \left(\frac{\partial \underline{g}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t = -\mathbf{C} \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{x}} &= - \frac{\partial \underline{g}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = -\mathbf{C}^t \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{q}} &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Unter der Annahme, daß die Rohwerte \underline{x}_{j-1} und \underline{q}_{j-1} für die unbekanntenen Vektoren vorhanden sind, ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Z} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta x}_j \\ \underline{\Delta q}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \underline{q}_{j-1} - \mathbf{A}^t \mathbf{P} \underline{v}_{j-1} \\ \underline{g}(\underline{x}_{j-1}) - \underline{c} \end{bmatrix}. \tag{2.80}$$

Die Inkremente für die Unbekannten $\underline{\Delta x}_j$ und $\underline{\Delta q}_j$ werden - ausgehend von Näherungswerten \underline{x}_j und \underline{q}_j - solange erneut bestimmt, bis sie oder die rechte Seite des obigen Systems ein Abbruchkriterium kleine Zahl unterschreiten, bzw. bis die Gleichungen nach (2.77) erfüllt sind.

2.2.4 Ausgleichsrechnung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten

Wendet man nun die Grundgleichung (2.10) der Ausgleichsrechnung auf die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten an, so gelingt dies durch Streichen der Terme (β_1) , (β_2) , (γ_1) , (γ_2) und (δ) der Grundgleichung der Ausgleichsrechnung. Zur Vermeidung tiefgestellter Zeiger wird weiterhin vereinbart, daß die für die Bedingungsgleichungen (β_2) verbleibenden Korrelaten mit \underline{q} , der funktionale Zusammenhang zwischen den Unbekannten und den ausgeglichenen Beobachtungen mit $\underline{g}(\underline{x}, \underline{l})$ bzw. nach Ersetzen der ausgeglichenen Beobachtungen \underline{l} mit Hilfe des Potentialanteiles (γ_2) mit $\underline{g}(\underline{x}, \underline{v})$ und die Sollwerte für diese Gleichungen mit \underline{c} bezeichnet werden. Damit ergibt sich folgendes Potential Φ

$$\Phi(\underline{x}, \underline{v}, \underline{q}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{P} \underline{v} - \underline{q}^t (\underline{g}(\underline{x}, \underline{v}) - \underline{c}) \tag{2.81}$$

Φ wird wiederum stationär, wenn die Ableitungen von Φ nach den Unbekannten verschwinden, wenn also folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= - \left(\frac{\partial \underline{g}(\underline{x}, \underline{v})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{q} = \underline{0} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{P} \underline{v} - \frac{\partial \underline{g}(\underline{x}, \underline{v})}{\partial \underline{v}} \underline{q} = \underline{0} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} &= - (\underline{g}(\underline{x}, \underline{v}) - \underline{c}) = \underline{0}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Die Bezeichnung für diese Ausgleichsmethode ist leicht verständlich. Im Gegensatz zu der bedingten Ausgleichung werden hier die Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekannten als Nebenbedingungen angesetzt.

Die nichtlinearen Gleichungen werden wie üblich linearisiert. Also ergibt sich für die unbekanntenen Vektoren $\underline{\Delta x}$, $\underline{\Delta v}$ und $\underline{\Delta q}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{v}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{q}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{v} \partial \underline{x}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{v} \partial \underline{v}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{v} \partial \underline{q}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{x}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{v}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta x} \\ \underline{\Delta v} \\ \underline{\Delta q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Die für unseren Fall sich ergebenden Matrizen lauten unter Beachtung, das die Matrix nach (2.83) symmetrisch ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{v}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{x} \partial \underline{q}} &= -\left(\frac{\partial g(\underline{x}, \underline{v})}{\partial \underline{x}}\right)^t = -\mathbf{A}^t \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{v} \partial \underline{v}} &= \mathbf{P} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{v} \partial \underline{q}} &= -\frac{\partial g(\underline{x}, \underline{v})}{\partial \underline{v}} = -\mathbf{B} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{q} \partial \underline{q}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Unter der Annahme, daß die Rohwerte \underline{x}_{j-1} , \underline{v}_{j-1} und \underline{q}_{j-1} für die unbekanntenen Vektoren vorhanden sind, ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\mathbf{A}^t \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{A} & -\mathbf{B}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta x}_j \\ \underline{\Delta v}_j \\ \underline{\Delta q}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \underline{q}_{j-1} \\ -\mathbf{P} \underline{v}_{j-1} + \mathbf{B} \underline{q}_{j-1} \\ \underline{g}(\underline{x}_{j-1}, \underline{v}_{j-1}) - \underline{c} \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Die Gleichungen nach (2.85) werden im allgemeinen zunächst nach den unbekanntenen Inkrementen $\underline{\Delta x}_j$ aufgelöst. Man erhält

$$\underline{\Delta x}_j = (\mathbf{A}^t (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A})^{-1} \left(\mathbf{A}^t (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^t \underline{v}_{j-1} - \underline{g}(\underline{x}_{j-1}, \underline{v}_{j-1}) - \underline{c}) \right). \quad (2.86)$$

Für die Korrelaten, die im Anschluß an die Bestimmung der Unbekannten \underline{x} ermittelt werden, ergibt sich

$$\underline{q}_j = \underline{q}_{j-1} + \underline{\Delta q}_j = (\mathbf{B}^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^t \underline{v}_{j-1} - \underline{g}(\underline{x}_{j-1}, \underline{v}_{j-1}) - \underline{c} - \mathbf{A} \underline{\Delta x}_j). \quad (2.87)$$

Die Verbesserungen sind sehr einfach zu bestimmen. Es gilt

$$\underline{v}_j = \underline{v}_{j-1} + \underline{\Delta v}_j = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \underline{q}_j. \quad (2.88)$$

Danach sind die Unbekannten $\underline{x}_j = \underline{x}_{j-1} + \underline{\Delta x}$ zu berichtigen, wodurch die neuerliche Bestimmung von \mathbf{A} und \mathbf{B} möglich wird. Mit diesen Matrizen wird der nächste Iterationsschritt durchgeführt bis die Inkremente der Unbekannten bzw. die rechten Seiten des Systemes (2.85) ein Abbruchkriterium unterschreiten bzw. bis die durchgreifende Kontrolle nach (2.82) erfüllt ist.

Zur Mechanik elastischer Körper

Als Teilgebiet der Physik beschreibt die Mechanik den Kräfte- und Bewegungszustand materieller Körper. Nach stofflichen Aggregatzuständen wird üblicherweise das Gesamtgebiet in eine Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper unterteilt. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns in erster Linie mit der Mechanik fester Körper, die ihrerseits in die Kinematik und Dynamik zerfällt. Dabei untersucht die Kinematik Bewegungs- und Verformungsvorgänge ohne Berücksichtigung einwirkender Kräfte (z.B. Deformationsmessungen in der Geodäsie sind damit ein Teilgebiet der Kinematik), wohingegen die Dynamik kausale Zusammenhänge zwischen den erwähnten Zuständen und den einwirkenden Kräften herstellt. Die Dynamik zerfällt in die Kinetik, welche zeitabhängige Kraft- und Verformungsvorgänge zum Inhalt hat, und die Statik, deren Ruhezustände gewissermaßen Sonderfälle darstellen. In diesem Teilgebiet der Mechanik, eben der Statik, bewegen wir uns im Rahmen dieser Arbeit. An dieser Stelle soll die Spezialisierung noch weiter vorangetrieben werden; hier ist die Statik der Tragwerke Ziel von Untersuchungen, welche der Ermittlung von Kraft- und Verformungszuständen zur nachfolgenden Bemessung und Konstruktion dient. Die festen Körper sind hier elastisch, d.h. sie verformen unter dem Angriff äußerer Lasten so, daß die Verformung nach dem Wegfall der Belastung wieder gänzlich abgebaut wird.

Vor ungefähr 300 Jahren schufen Leibniz auf dem Kontinent und ganz unabhängig davon Newton in England die Differential- und Integralrechnung und damit das wichtigste Handwerkszeug der Mechanik. Damit wurden im letzten Jahrhundert die fundamentalen Gleichungen der Elastizitätstheorie (Gleichgewicht und Verträglichkeit) entwickelt. Noch weit vor Beginn unseres Jahrhunderts also existierte das Grundkonzept der klassischen Elastizitätstheorie. Navier, St. Venant, Cauchy, Green etc. sind damit in Verbindung zu bringen. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts werden bereits Rahmen berechnet, was unter anderem den Arbeiten von Maxwell, Castigliano und Mohr zu verdanken ist. Obwohl der Begriff der Matrix ebenfalls aus dieser Zeit stammt, dauerte es nun bis 1927 als Ostenfeld in Dänemark Verfahren entwickelte, bei denen die Verschiebungen die Unbekannten darstellten [72]. Diese Verfahren sind die Vorläufer der heute gebräuchlichen Matrizenmethoden. Damals war der Umfang der mit diesen Methoden zu bewältigenden Arbeiten, die entweder mit dem Kraft- oder Weggrößenverfahren durchgeführt wurden, sehr eingeschränkt. Dies änderte sich 1932 mit dem Verfahren der Momentenaufteilung von Cross [15]. Elektronische Rechenautomaten in den früher Jahren von 1950 veranlaßten einige weitblickende Wissenschaftler, Berechnungsmethoden in ein Format umzuschreiben, das dem Computer angepaßt war; es handelte sich um das Matrizenkalkül. Besonders bemerkenswerte Beiträge lieferten etwa Argyris [3], Turner, Clough, Martin und Topp [104]. Es wäre aber keineswegs zutreffend, die Einführung aller wesentlichen Gesichtspunkte diesen Arbeiten zuzuschreiben, da zuvor in den Arbeiten von Courant [13] und Hrennikoff [48] bereits Grundbausteine gelegt worden waren. Die Entwicklungen dieser Verfahren beschreibt Zienkiewicz [107] sehr detailliert. Diese Verfahren, die unter der Bezeichnung - Finite Elemente Methoden - bekannt sind, sind bis heute enorm weiterentwickelt und angewendet worden, insbesondere auch nachdem sie - relativ spät zwar - als Feld von Mathematikern und Informatikern entdeckt wurden. Das Angebot an Literatur zu diesem Themenkomplex ist enorm, hier wurde vielfach [2], [27], [99] und [91] benutzt.

Zunächst werden statische elastomechanische Probleme - soweit sie für das Verständnis dieser Arbeit bedeutsam sind - mit Hilfe der klassischen Mechanik, die infinitesimale und damit stetige Größen verwendet, sehr allgemein für einen dreidimensionalen, isotropen Körper behandelt ([103], [30]). Ein Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung der statischen Aufgaben als Extremalprinzip [11]. Das dabei entstehende allgemeine Funktional (Potential, Energie) für den kontinuierlichen dreidimensionalen Festkörper wird später benötigt, um nach der Diskretisierung des Kontinuums in Netzstrukturen für die entstehenden Tragwerkelemente zur Verfügung zu stehen bzw. spezialisiert zu werden. Die einzelnen Tragwerkelemente sind dabei als finite Elemente zu verstehen, die ganz unterschiedlicher Natur sein können, also. z.B. Stab-, Balken-, Scheiben-, Platten- oder Schalenelemente. Mit dieser Spezia-

lisierung auf einzelne Elemente verwandelt sich das Funktional, in welchem unbekannte Funktionen formuliert sind, in eine Funktion von einzelnen Unbekannten. Mit anderen Worten: die Variationsaufgabe wird gewissermaßen diskret oder das Funktional wird zur Funktion, womit die Übertragung auf unser allgemeines Ausgleichungskonzept möglich wird. Dies ist eigentlich selbstverständlich, denn letztlich müssen bei der Berechnung von diesen Aufgaben einzelne Unbekannte bestimmt werden, mit Hilfe derer man die unbekanntenen Funktionen beschreiben kann. Nach der Herleitung der mathematischen Theorie zur Elastizität, wird der Übergang auf diskrete mechanische Aufgaben vollzogen. Mit der Matrixschreibweise werden zwei Computermethoden zur Berechnung von Tragwerken vorgestellt, und zwar das Weg- und das Kraftgrößenverfahren.

3.1 Zur Berechnung kontinuierlicher Körper

3.1.1 Räumlicher Spannungszustand

Unter dem Angriff äußerer Kräfte verformt sich ein fester Körper und es werden Widerstände geweckt, die der Verformung entgegenwirken. Wenn wir einen solchen Körper durch einen gedachten Schnitt in zwei Teile trennen, dann muß - falls der Körper unbewegt bleibt - jeder Teil für sich im Gleichgewicht sein.



Abbildung 3.1: Schnittprinzip

Dazu ist freilich notwendig, daß auf den ersten Teil auf die durch den Schnitt verursachte Trennungsfläche bestimmte Kräfte einwirken, die vom zweiten Teil geäußert werden. Umgekehrt muß der erste Teil in dieser Fläche die entgegengesetzt gleichen auf den zweiten Teil ausüben. Durch den gedachten Schnitt haben wir innere Kräfte zu äußeren - und damit gewissermaßen sichtbar - gemacht. Wir sehen also, daß innere Kräfte stets paarweise auftreten. Nun betrachten wir einen Punkt auf der gedachten Trennfläche, der innerhalb eines Flächenelementes dF liegt. Durch diese Fläche dF hindurch werden von einem Teilkörper zum anderen innere Kräfte übertragen, die wir zur resultierenden Einzelkraft dP zusammenfassen. Der Differentialquotient $\frac{dP}{dF}$ stellt den Spannungsvektor im betrachteten Punkt für die Lage des Flächenelementes dar. Man kann diese Spannung senkrecht und parallel zum Flächenelement in Komponenten zerlegen und erhält so die Normalspannung σ und die Schubspannung τ .

Wir denken uns im Innern eines belasteten, im Gleichgewicht stehenden Körpers ein Volumenelement in Form eines Rechteckes abgegrenzt (Abbildung 3.2). Die Kanten seien parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes x, y, z . Vom umgebenden Werkstoff werden nun Kräfte auf das Rechteck ausgeübt wie oben beschrieben. Nun bezieht man diese Kräfte auf die Flächeneinheit, d.h. man berechnet Spannungen, und zerlegt sie parallel zu den Koordinatenachsen in eine Normalspannungs- und zwei Schubspannungskomponenten.

In einer ersten Überlegung wollen wir das Element als verschwindend klein voraussetzen, denn wir wollen gleichartige Spannungskomponenten gegenüberliegender Seiten als gleich groß annehmen und die Volumenkräfte unterdrücken, denn sie ist proportional zum Volumen, also von dritter Ordnung klein. Folgende Vereinbarungen werden getroffen. Die Spannungen erhalten positives Vorzeichen, wenn sie auf einer Seitenfläche mit der jeweils größeren Koordinate in Richtung der positiven Halbachse wirken. Die Normalspannungen werden somit als Zugspannungen positiv definiert, der beigefügte Zeiger gibt ihre Richtung an. Die Schubspannungen erhalten zwei tiefgestellte Zeiger. Der erste gibt die Richtung

der Normalen der Seitenfläche, der zweite die Richtung der Spannung an. Grundsätzlich bringt man an den Schnittflächen die Spannungskomponenten mit positivem Wirkungssinn an.

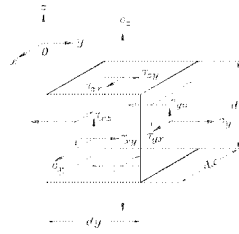


Abbildung 3.2: Spannungen am Volumenelement

Am betrachteten Element treten demnach neun Spannungskomponenten auf. Das Gleichgewicht gegen Drehen erfordert aber sofort, daß

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} . \quad (3.1)$$

Es verbleiben also sechs verschiedene Spannungskomponenten: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} und τ_{zx} . Das sind die Bestimmungsstücke des räumlichen Spannungszustandes in jenem Punkt, um den das differentielle Volumenelement abgegrenzt worden ist. Damit sind wir auch in der Lage die Spannung in diesen Punkt für ein Fläche beliebiger Neigung anzugeben, was im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit ohne Bedeutung ist und deshalb nicht gezeigt wird.

Nunmehr gehen wir von der Tatsache aus, daß der Spannungszustand von Ort zu Ort innerhalb des betrachteten Festkörpers verschieden ist; wir müssen somit ab sofort die Volumenkräfte berücksichtigen. Dabei gehen wir wieder von einem Volumenelement aus, dessen Mittelpunkt die Koordinaten x , y , z besitzt und die Spannungskomponenten σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} und τ_{zx} . Wenn man von diesem Punkt um dx , dy und dz in positive und negative Richtungen fortschreiten, so ändern sich die Spannungskomponenten um die Differentiale $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$, $d\tau_{xy}$, $d\tau_{yz}$ und $d\tau_{zx}$. Unter der Annahme, daß der Spannungszustand durch eine stetige Funktion der Koordinaten x , y , z beschrieben wird, können die Spannungswerte durch Taylorsche Reihen approximiert werden. Es ergibt sich z.B. für die veränderte Normalspannung in x -Richtung

$$\sigma_x \pm d\sigma_x = \sigma_x \pm \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \pm \dots \quad (3.2)$$

Berücksichtigt man noch die Volumenkräfte durch die auf Volumeneinheit bezogenen Komponenten X , Y und Z , dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in x , y und z -Richtung wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz + Z &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

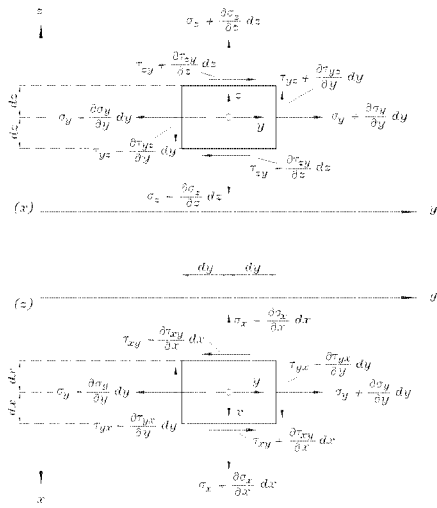


Abbildung 3.3: Spannungen in Schnittflächen

Die Bedingungen für das Gleichgewicht gegen Drehungen um die Achsen sind infolge der Gleichung (3.1) bereits erfüllt.

Die räumlichen Spannungen verursachen räumliche Verzerrungen, denen wir uns nun zuwenden.

3.1.2 Räumlicher Verzerrungszustand

Die Formänderung eines festen Körpers kann durch die Komponenten u , v und w der Verschiebungen seiner Punkte beschrieben werden. Da der Zusammenhang des Körpers bei der Verformung erhalten bleiben soll, müssen die Verschiebungskomponenten stetige Funktionen der Koordinaten x , y und z sein. Die Verschiebungen benachbarter Punkte können sich nur um Differentiale unterscheiden. Erfährt der Punkt $P(x, y, z)$ die Verschiebungen u , v und w , dann erleidet der Nachbarpunkt $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$ die Verschiebungen $u + du$, $v + dv$ und $w + dw$, die man mit den Taylorschen Reihenentwicklungen durch die Verschiebungen des Punktes P ausdrücken kann. Unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung ergibt sich beispielsweise

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \dots \quad (3.4)$$

Man erhält auf analoge Weise

$$\begin{aligned}
 du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
 dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
 dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Bei der Formänderung des Körpers ändern sich die Entfernungen seiner Punkte und die von Linienelementen eingeschlossenen Winkel ebenso. Diese Verzerrungen werden näher untersucht. Dabei werden die Punkte P und Q genauer betrachtet. Ihr Abstand

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{3.6}$$

ändert sich in

$$ds_n = \sqrt{(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2}. \tag{3.7}$$

Setzen wir die Werte aus Gleichung (3.5) ein, so erhalten wir

$$ds_n = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_x)dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y)dy^2 + (1 + 2\varepsilon_z)dz^2 + 2(\gamma_{xy} dx dy + \gamma_{yz} dy dz + \gamma_{zx} dz dx)}. \tag{3.8}$$

Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet worden

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Es kann gezeigt werden, daß die Dehnung in x Richtung beispielsweise $\varepsilon_x = \frac{ds_n - dx}{dx}$ ist. Analoges gilt für ε_y und ε_z . Die in Gleichung (3.9) festgelegten Größen stellen also die Dehnungen in Richtung der Koordinatenachsen dar. Ebenso können die Größen γ_{xy} , γ_{yz} und γ_{zx} als die Änderungen der von den Linienelementen dx , dy und dz eingeschlossenen rechten Winkel gedeutet werden.

Im Fall verschwindend kleiner Formänderungen dürfen die Quadrate und Produkte der Ableitungen in Gleichung (3.9) vernachlässigt werden. Man erhält somit

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die obigen Gleichungen bzw. die strengen nach (3.9) und (3.10) werden als geometrische Bedingungen bezeichnet. Die Größen ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} werden als die Verzerrungskomponenten bezeichnet.

3.1.3 Hookesches Elastizitätsgesetz

Nach der Festlegung der Spannungs- und Verzerrungskomponenten wird der Zusammenhang zwischen ihnen näher beleuchtet. Dazu richten wir unser Augenmerk auf das einfachste Formänderungsgesetz, das Hookesche Gesetz; die Formänderung ist verhältnismäßig der Kraft, die sie hervorruft. Der Werkstoff sei homogen und isotrop. Beim Zugversuch in Richtung der Stabachse ist eine Dehnung in Richtung der Achse zu beobachten; gleichzeitig erhält man Querverkürzungen in die zur Stabachse senkrechten Richtungen. Der Spannungszustand ist einachsiger und wird durch die Spannung σ , die in den zur Achse senkrechten Schnitten auftritt, beschrieben. Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung ε des Stabes

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.12)$$

Die Konstante E heißt Dehnmaß oder Elastizitätsmodul. Die Querdehnung ε_q muß ebenso verhältnismäßig der Spannung sein, somit

$$\varepsilon_q = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad (3.13)$$

wobei der Reziprokwert der Querdehnzahl μ als Poissonsche Konstante bezeichnet wird. Isotrope Werkstoffe sind dadurch definiert, daß E und μ für alle Richtungen im Raum konstante Größen besitzen. Ohne Beweis gelten folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Weiterhin können die Beziehungen zwischen den Schubspannungen und den von ihnen verursachten Winkeländerungen entwickelt werden

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei wird $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ als Gleitmaß oder Schubmodul bezeichnet. E , μ und G werden als die Konstanten der Elastizität bezeichnet. Aus den Gleichungen (3.14) und (3.15) ist zu ersehen, daß Änderungen der Längen des Rechteckelementes nur von den Normalspannungen bewirkt werden, während Winkeländerungen von den Schubspannungen verursacht sind. Wir wollen an dieser Stelle die Matrixschreibweise benutzen und die eben erwähnten Gleichungen ausführlich schreiben als

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = D^{-1} \underline{\sigma}. \quad (3.16)$$

Die obige Gleichung lautet also $\underline{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}(\mu, E)\underline{\sigma}$. Die Umkehrbeziehung

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 - \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

also $\underline{\sigma} = \mathbf{D}\underline{\varepsilon}$. Der Faktor f entspricht $\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$; hier handelt es sich um das Hookesche Gesetz. Für nicht isotropes, elastisches Material besteht ebenfalls eine lineare Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen. Im allgemeinen anisotropen Fall ergeben sich dabei 21 voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten, wobei \mathbf{D} natürlich symmetrisch bleibt. Diese Anzahl unabhängiger Materialkennwerte reduziert sich gemäß den Eigenschaften des Materials, bis letztlich bei völliger Isotropie die beiden unabhängigen Elastizitätskonstanten μ und E verbleiben. Nur Materialien, die mit dieser Matrix beschrieben werden können, sollen in der vorliegenden Arbeit eine Rolle spielen, also elastische.

3.1.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Bei der Verformung des belasteten Körpers leisten die einwirkenden äußeren Kräfte Arbeit. Wir wollen nun voraussetzen, daß die gesamte Arbeit als Formänderungsenergie (innere Arbeit) gespeichert wird. Mit anderen Worten: kein Teil der Arbeit darf in Bewegungsenergie umgesetzt werden; aus diesem Grund müssen die Lasten unendlich langsam von Null an bis zur ihrem Endwert wachsen, in jedem Augenblick herrscht dabei Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften. Wenn die Formänderung des Körpers eine rein elastische ist, dann wird die während der Belastung gespeicherte Energie bei der Entlastung wieder zurückgewonnen werden. Die gesamte innere Arbeit setzt sich aus den Beträgen einzelner Volumenelemente zusammen. Wir betrachten wieder das Element (Rechteck), auf dessen achsparallele Seitenflächen der umgebende Werkstoff die auf die Flächeneinheit bezogenen Kräfte, also die Spannungen σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} und τ_{zx} ausübt. Für das Volumenelement stellen diese von der Umgebung geäußerten Kräfte äußere dar, die inneren sind diesen entgegengerichtet gleich. Man kann aus diesem Grund die Formänderungsarbeit der inneren Widerstände als Arbeit dieser äußeren Kräfte berechnen. In einem ersten Schritt sollen nun die Arbeitsbeiträge der Normalspannungen σ berechnet werden. Er ergibt mit folgenden Überlegungen für die Normalspannung in x -Richtung: der Abstand dx der zur x -Achse senkrechten Seitenflächen des Elementes wird bei der Formänderung um $\varepsilon_x dx$ vergrößert; die auf diese Schnittflächen einwirkenden Kräfte $\sigma_x dy dz$ erfahren hierbei Verschiebungen ihrer Angriffspunkte und leisten daher Arbeit, die Kraft mal Arbeitsweg wäre, wenn die Kräfte während der Verschiebung einen konstanten Wert hätten. Tatsächlich wachsen die Kräfte von Null aus an, und da die Formänderungen den einwirkenden Kräften verhältnismäßig sind, leistet die Normalspannung in x Richtung folgende Arbeit

$$\frac{1}{2}(\sigma_x dy dz)\varepsilon_x dx = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dV, \quad (3.18)$$

wenn mit $dV = dx dy dz$ das Volumen des Elementes bezeichnet wird. In gleicher Weise ergeben sich die Arbeitsbeiträge für die Normalspannungen σ_y und σ_z . Eine detaillierte Berechnung der Arbeitsbeiträge für die Schubspannungen unterbleibt an dieser Stelle; allerdings soll das Ergebnis des Arbeitsbeitrages der Schubspannung τ_{xy} nicht verschwiegen werden

$$\frac{1}{2}(\tau_{xy} dy dz)\gamma_{xy} dx = \frac{1}{2}\tau_{xy} \gamma_{xy} dV. \quad (3.19)$$

Gleichartige Ausdrücke ergeben sich für τ_{yz} und τ_{zx} . Die Formänderungsarbeit des Gesamtkörpers erhalten wir sodann, wenn wir alle Beiträge des Volumenelements zusammenfassen und über das gesamte Volumen des Körpers integrieren. Die innere Arbeit A_i ergibt sich also zu

$$A_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV. \quad (3.20)$$

An dieser Stelle soll noch einmal darauf aufmerksam gemacht werden, daß obige Gleichung lediglich für lineare Formänderungsgesetze gilt.

Nach dieser ausführlichen Einführung der Formänderungsarbeit sind wir nun in der Lage, uns dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Arbeiten) zuzuwenden, indem wir wie folgt definieren: als virtuelle Verrückungen bezeichnet man zulässige, d.h. mit den Stützbedingungen des Systemes verträgliche Verschiebungen der Punkte, welche mit verschwindend kleinen Verzerrungen einhergehen; die Änderungen der inneren Kräfte des Körpers dürfen also vernachlässigt werden. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen, das unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden kann, besagt nun: erteilen wir einem im Gleichgewicht befindlichen Körper aus seiner Gleichgewichtslage heraus eine virtuelle Verrückung, so ist die von den äußeren Kräften hierbei geleistete Arbeit gleich der zugehörigen Arbeit δA_i der inneren Kräfte. Diese Verrückung ist demnach ohne Arbeitsaufwand möglich. Bezeichnet man mit X , Y und Z die Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen Volumenkraft, mit p_x , p_y und p_z die Komponenten der auf die Flächeneinheit bezogenen Oberflächenkräfte, mit δu , δv und δw die Komponenten der virtuellen Verschiebungswege der Punkte des Körpers, dann gilt (ohne die Berücksichtigung von äußeren Einzelkräften, da in diesem Fall eine Integration unnötig ist)

$$\delta A_i = \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV + \int_O (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dO. \quad (3.21)$$

Das erste Integral erstreckt sich über das Volumen, das zweite über die Oberfläche. Die Arbeiten aller Kräfte ergeben sich hierbei direkt als Produkte Kraft mal Weg, weil die Kräfte während der Verschiebung ihre Größe nicht ändern. Mithin gilt auch

$$\delta A_i = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV, \quad (3.22)$$

wenn $\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$, . . . $\delta \gamma_{zx}$ die Änderungen der Verzerrungskomponenten bei der virtuellen Verschiebung bedeuten. Noch eine Bemerkung zu der Bezeichnung δ . Dieses δ ist hier im Sinne der Variationsrechnung als Variation zu verstehen [67], [14].

Im Hinblick auf die Unveränderlichkeit der Kräfte kann das Variationszeichen δ vor das Integral gezogen werden und das Prinzip der virtuellen Verrückungen wie folgt geschrieben werden

$$\delta \left\{ A_i - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \int_O (p_x u + p_y v + p_z w) dO \right\} = 0. \quad (3.23)$$

Diese Gleichung versetzt uns in die Lage, das Prinzip der minimalen Gesamtenergie einzuführen.

3.1.5 Prinzip der minimalen Gesamtenergie

Der Ausdruck innerhalb der geschweiften Klammer wird potentielle Energie des Systemes genannt und üblicherweise mit Π bezeichnet. Da die Anteile der potentiellen Energie in der Statik die einzigen sind, denn Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind nicht vorhanden, bedeutet die Gleichung (3.23), daß die wirklich Verschiebungen u , v und w gegenüber allen möglichen mit den Stützbedingungen des Systemes verträglichen Verschiebungssystemen $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$ dadurch ausgezeichnet sind,

daß für sie die potentielle Energie Π des Systems einen Extremwert annimmt. Wie die Untersuchung des Extremwertes ergibt, handelt es sich dabei um einen Kleinstwert. Wir erhalten den Satz vom Minimum der Gesamtenergie

$$\Pi = A_i - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \int_O (p_x u + p_y v + p_z w) dO \Rightarrow \text{Minimum}. \quad (3.24)$$

Die Lösung der Aufgabe wird erhalten, indem die erste Variation von Π zu Null gesetzt wird

$$\delta\Pi = 0. \quad (3.25)$$

Unter der Voraussetzung, daß $\delta^2\Pi > 0$ gilt, wird sich ein Kleinstwert ergeben.

Im folgenden werden wir die Gesamtenergie Π etwas kompakter schreiben, indem wir einige Vektoren einführen. Dies geschieht auch im Hinblick auf die spätere Beschreibung dieser Gesamtpotentiale mit der Ausgleichsrechnung.

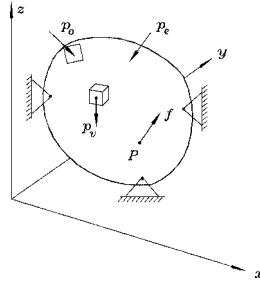


Abbildung 3.4: Belasteter Körper

Die Spannungen eines Punktes P seien im Vektor $\underline{\sigma}$ abgelegt und die Verzerrungen im Vektor $\underline{\varepsilon}$. Weiterhin seien die Volumenkraft mit dem Vektor \underline{p}_v und die Oberflächenkräfte mit dem Vektor \underline{p}_o bezeichnet und die Verschiebungen der Punkte \underline{f} . Einzelkräfte \underline{p}_e werden eingeführt

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})^t \\ \underline{\varepsilon} &= (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})^t \\ \underline{p}_v &= (X, Y, Z)^t \\ \underline{p}_o &= (p_x, p_y, p_z)^t \\ \underline{p}_e &= (p_{x_e}, p_{y_e}, p_{z_e})^t \\ \underline{f} &= (u, v, w)^t. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Wir erhalten die gesamte potentielle Energie Π des mechanischen Systems als Summe der inneren Energie Π_i und dem negativen Potential der äußeren Lasten Π_a

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} dV}_{\Pi_i} + \underbrace{\left(- \int_V \underline{p}_v \underline{f} dV - \int_O \underline{p}_o \underline{f} dO - \sum \underline{p}_e \underline{f} \right)}_{\Pi_a}. \quad (3.27)$$

Abschließend soll noch auf verallgemeinerte Energieprinzipien der Mechanik hingewiesen werden (z.B. Hellinger-Reissner), bei denen anstelle der gesamten potentiellen Energie Π erweiterte Funktionale Verwendung finden. Ein solches Prinzip ist z.B. das Variationsprinzip von Hu-Washizu, das simultan die Gleichgewichtsbedingungen, die kinematischen Gleichungen, die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen und weitere Randbedingungen umfaßt. Komplementärpotentiale sollten in diesem Zusammenhang nicht unerwähnt bleiben [42], [97]. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die Gesamtenergie Π minimiert; Nebenbedingungen werden mitunter berücksichtigt.

3.2 Zur Berechnung diskreter Strukturen

Stark verflochtene Zusammenhänge in komplizierten Systemen können sehr häufig nicht unmittelbar und als Ganzes erfaßt werden. Bei der Behandlung derartiger Probleme geht man üblicherweise so vor, daß das zu untersuchende System in Elemente aufgegliedert wird, anschließend wird das Verhalten dieser Elemente betrachtet, um letztlich nach dem Zusammenfügen aller Einzelelemente Erkenntnisse bezüglich des Systemverhaltens zu gewinnen. Durch die Entwicklung leistungsfähiger Rechenanlagen kann man diskrete Probleme auch dann lösen, wenn die Anzahl der Einzelelemente sehr groß ist.

Im folgenden wollen wir einen *mathematischen* Ansatz zur Diskretisierung eines Kontinuums der Elastomechanik vorstellen, der sich geradezu zwangsläufig aus dem in den vorhergehenden Abschnitten Erläutertem ergibt. Dort haben wir gesehen, daß in einem Tragwerk unter beliebiger Belastung physikalische und geometrische Bedingungen einzuhalten sind. Im einzelnen sind dies

1. die statische Verträglichkeit (Gleichgewicht) der Kräfte nach Gleichung (3.3),
2. die kinematische Verträglichkeit der Verschiebungen und Dehnungen nach Gleichung (3.11) und
3. der Zusammenhang der Spannungen und Dehnungen über das Materialgesetz nach der Gleichung (3.17).

Es liegt also nahe, zur Lösung eines Problems der Elastomechanik die entsprechenden Differentialgleichungen (3.3) und (3.11) zusammen mit einem Materialgesetz (etwa nach Gleichung (3.17)) aufzustellen, um diese dann für gegebene statische und kinematische Randbedingungen zu integrieren. Dieser Weg, der die exakte Lösung des Problems ergibt, gelingt nur in Fällen einfacher Belastung und Geometrie. Mit der Entwicklung von Rechenanlagen konnte man daran gehen, die komplizierten Fälle der Praxis durch numerische Verfahren anzunähern. Dabei werden z.B. Differentiale durch Differenzen ersetzt, was zu den sogenannten Differenzenverfahren führt. Auch bei diesen Differenzenverfahren werden Netze benötigt (meistens mit konstantem Maschenabstand), um anstelle der Differentialgleichung die Differenzgleichung im Netzknoten angeben zu können.

Nicht nur Differenzenverfahren, sondern auch sogenannte Gitterrostmethoden können eingesetzt werden, um mechanische Aufgabenstellungen diskret zu lösen. Bei dieser Methode handelt es sich im Gegensatz zu den Differenzenverfahren um physikalische Idealisierungen. Bei diesen Gitterrostmethoden werden kontinuierliche Tragwerke durch gleichwertige Stabwerkssysteme ersetzt [99]. So werden am Institut des Verfassers seit vielen Jahren Membranen durch sehr engmaschige Seilnetze ersetzt. Üblicherweise wird die Matrizenverschiebungsmethode bei den Gitterrostverfahren zur Ermittlung der Unbekannten eingesetzt. Der Begriff Stabwerkmodell gehört wohl auch in diesen Zusammenhang. Mit diesen Stabwerkmodellen werden z.B. dreidimensionale Stahlbetonteile bemessen.

Aber nicht nur Gitterrostverfahren, sondern auch die Methode der finiten Elemente benötigt Netze zur Bestimmung des Tragwerkes. Die Methode der finiten Elemente beruht auf einer *physikalischen* Idealisierung des Tragwerkes. Nach der Erzeugung des finiten Elementnetzes wird eine der beiden oben genannten Verträglichkeitsbedingungen im finiten Element exakt erfüllt, indem einfache verträgliche Ansätze für die Verschiebungen bzw. für die Spannungen gemacht werden. Ausgehend von den beiden Verträglichkeitsbedingungen haben sich zwei Verfahren in der Methode der finiten Elemente entwickelt: das Weg- und das Kraftgrößenverfahren.

In beiden Fällen handelt es sich um Approximationen, die bei Verfeinerung der Diskretisierung gegen die exakte Lösung streben sollen. Hier nun werden die mathematischen Methoden, also die sogenannten Differenzenverfahren, nicht weiter verfolgt, im Gegensatz zu den physikalischen Finite Elemente Methoden, die jetzt genauer beleuchtet werden; dabei wird zuerst das Weggrößenverfahren, danach das Kraftgrößenverfahren beschrieben. Diese beiden Verfahren können auch unabhängig von der Finiten Elemente Methode gesehen werden, da die Lösung für das Gesamtsystem als strukturelle Vereinigung seiner Elemente genau den gleichen Regeln folgt, wie sie auch für Probleme diskreten Charakters gelten.

An dieser Stelle wird darauf aufmerksam gemacht, daß das Weggrößenverfahren im Zeitalter des Computers eine weitaus größere Bedeutung besitzt, als das Kraftgrößenverfahren, obwohl die Gleichungssysteme, die mit dem Kraftgrößenverfahren entstehen, im allgemeinen kleiner sind als die der Verschiebungsmethode. Der Grund hierfür liegt darin, daß sich die Kraftmethode nicht so einfach automatisieren läßt.

3.2.1 Weggrößenverfahren

3.2.1.1 Beschreibung und Anwendungsmöglichkeiten

Das Weg- bzw. Verschiebungsverfahren läßt sich im allgemeinen in mehrere Teilschritte gliedern, die problemunabhängig bzw. ganz generell geeignet sind zur näherungsweise Berechnung von kontinuierlichen mechanischen Systemen. Die nachfolgende Aufzählung wiederholt Vorheriges aus Gründen der Vollständigkeit.

1. Das Kontinuum wird in eine Anzahl finiter Elemente zerlegt. Falls ein Problem diskreter Art vorliegt, entfällt dieser Punkt natürlich.
2. Es wird angenommen, daß die Elemente durch eine bestimmte Anzahl von Knotenpunkten, die an den Elementrändern liegen, untereinander verbunden sind. Die Verschiebungen der Knotenpunkte werden als die grundlegenden Unbekannten des Problem es aufgefaßt, was dieser Methode den Namen gibt.
3. Der Verschiebungszustand innerhalb jedes (finiten) Elementes wird mittels gewählter Funktionen in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen eindeutig festgelegt.
4. Durch die Verschiebungsfunktionen ist auch der Verzerrungszustand im Innern eines Elementes eine Funktion der Knotenpunktverschiebungen bzw. der Weggrößen. Aus diesen Verzerrungen kann mit Hilfe des Materialgesetzes die Spannungsverteilung im gesamten Element und somit auch an den Elementrändern bestimmt werden.
5. Es wird ein System von Knotenkräften bestimmt, das im Gleichgewicht mit den Oberflächen- und Volumskräften steht. Dieses System wird als sogenannte Ersatzbelastung bezeichnet.
6. Nach diesen Teilschritten kann nun die Berechnung der unbekannt en Weggrößen erfolgen. Dabei wird an jedem Punkt das Gleichgewicht gebildet, indem man die Ersatzknotenlasten den inneren Kräften, welche in Abhängigkeit von den unbekannt en Weggrößen ausgedrückt werden, gleichsetzt.
7. Aus diesen unbekannt en Verschiebungen lassen sich eine Reihe von Parametern ableiten, die zur Problemlösung notwendig sind, wie z.B. Verzerrungen, Spannungen etc..

An dieser Stelle soll nicht verschwiegen werden, daß eine Reihe von Näherungen eingeführt wurde, die bei der Beurteilung der Ergebnisse beachtet werden sollten. So ist in vielen Fällen nicht zu gewährleisten, daß die Ansatzfunktionen die Forderung nach Stetigkeit zwischen den Elementen erfüllen; weiterhin werden die Gleichgewichtsbedingungen nur summarisch eingehalten, da mit Ersatzlasten operiert wird. Die beschriebene Vorgehensweise wird mit Sicherheit Resultate erbringen, die von der Form bzw. Einteilung der finiten Elemente, falls solche vorliegen, nicht unabhängig sein kann.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß das Weggrößenverfahren nicht nur zur Berechnung diskreter, sondern auch kontinuierlicher Strukturen eingesetzt werden kann. Hier nun schließt sich die

Beschreibung des Weggrößenverfahrens ganz unabhängig davon an, ob dieses Verfahren zur Berechnung eines diskreten oder eines diskretisierten Problem (Finite Element Methode) eingesetzt wird. Dieser Sachverhalt ist im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit insoweit von Bedeutung, als damit die Berechnung von kontinuierlichen Systemen mit Netztheorien möglich wird.

3.2.1.2 Theorie in Matrizenschreibweise

Nun aber zur matriziellen Darstellung des Verfahrens (siehe z.B. [52]), in welchem eindeutige (lineare) Gleichungen zur Berechnung von Knotenverschiebungen (Verschiebungen bzw. Weggrößen) aus den Knotenlasten entwickelt werden; da die Knotenverschiebungen die Unbekannten im System sind, wird dieses Verfahren Weggrößenverfahren genannt. Erst nach der Berechnung der Verformungen sind die für den Bauingenieur wichtigeren Kraftgrößen zu bestimmen.

Die Ausgangsgleichung für die Darstellung des Weggrößenverfahrens ist die Bestimmungsgleichung für die Verformung eines Tragwerkelementes i

$$\underline{v}_i = \mathbf{F}_i \underline{s}_i, \quad (3.28)$$

welche die linear unabhängigen Stabendkräfte \underline{s}_i des Elementes i über die sogenannte Flexibilitätsmatrix \mathbf{F}_i mit den Verformungen \underline{v}_i verknüpft. Die Flexibilitätsmatrix ist eine nichtsinguläre Matrix, woraus sofort folgt, daß die inverse Beziehung ebenso

$$\underline{s}_i = \mathbf{F}_i^{-1} \underline{v}_i, \quad (3.29)$$

gilt. Dabei wird die inverse Flexibilitätsmatrix \mathbf{F}_i^{-1} als reduzierte Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_i bezeichnet. Anschließend wird für das Gesamtsystem formuliert

$$\underline{s} = \mathbf{K} \underline{v}. \quad (3.30)$$

\underline{s} ist der aus allen linear unabhängigen Stabendkräften gebildete Hypervektor, \underline{v} der dazugehörige Vektor der Elementverformungen und \mathbf{K} die aus \mathbf{K}_i gebildete symmetrische Übermatrix. Die Gleichung beschreibt das Elastizitätsgesetz der Tragwerkselemente; sie ist umkehrbar eindeutig. Die zweite wesentliche Gleichung ist die, welche die kinematische Verträglichkeit zwischen Knotenverschiebungen und Elementverformungen sicherstellt

$$\underline{v} = \mathbf{A} \underline{r}, \quad (3.31)$$

wobei der Vektor \underline{r} die Knotenverschiebungen und \mathbf{A} eine Matrix ist, die aus den Gleichgewichtsgleichungen wie folgt abgeleitet ist. Für das Gesamttragwerk gelten folgende Gleichgewichtsbedingungen

$$\underline{p} = \mathbf{A}^t \underline{s}. \quad (3.32)$$

\underline{p} sind die Knotenlasten und \mathbf{A}^t wird als Gleichgewichtsmatrix bezeichnet. Die Anzahl der Zeilen dieser Matrix, welche linear unabhängig sind, entspricht der Anzahl der unbekannt Verformungen und die bei statisch unbestimmten Systemen größere Anzahl von Spalten der Anzahl der linear unabhängigen Stabendkräfte. Die Gleichung (3.30) in (3.32) eingesetzt, ergibt demnach sofort

$$\underline{s} = \mathbf{K} \mathbf{A} \underline{r}. \quad (3.33)$$

Diese Gleichung wird dann, nachdem die unbekannt Knotenverschiebungen \underline{r} bestimmt sind, zur Ermittlung der Stabendkräfte \underline{s} benötigt. Durch Einsetzen von (3.33) in (3.32) erhält man die Grundgleichungen des Weggrößenverfahrens, namentlich

$$\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \underline{r} = \underline{p}. \quad (3.34)$$

Üblicherweise definiert man die Gesamtsteifigkeitsmatrix als

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}, \quad (3.35)$$

und erhält schließlich

$$\mathbf{K}_g \underline{r} = \underline{p}. \quad (3.36)$$

Es folgen einige Überlegungen zu den Eigenschaften der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g . Die Flexibilitätsmatrizen \mathbf{F}_i , und damit die reduzierten Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_i , sind positiv definit. Aus der Tatsache, daß die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t linear unabhängige Zeilen besitzt, folgt sofort, daß das Produkt $\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}$ und damit die Steifigkeitsmatrix positiv definit ist. Die unbekannt Knotenverschiebungen \underline{r} können also nach Gleichung (3.36) bestimmt werden. Im Anschluß daran ist die Ermittlung der Schnittgrößen, Lagerreaktionen, etc. möglich.

Damit ergeben sich die folgende Schritte zur Berechnung von Tragsystemen mit dem Weggrößenverfahren.

1. Bestimmung der Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t
2. Bereitstellung der reduzierten Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_i
3. Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g
4. Besetzung des Lastvektors \underline{p}
5. Bestimmung der Unbekannten $\underline{r} = \mathbf{K}_g^{-1} \underline{p}$
6. Berechnung der Stabendkräfte $\underline{s} = \mathbf{K} \mathbf{A} \underline{r}$ und aller Schnittgrößen

3.2.1.3 Beispiel: ebenes Fachwerk

Im folgenden werden die einzelnen Schritte des Verfahrens an einem kleinen Beispiel eines ebenen Fachwerkes nachvollzogen.

Knotentafel		
Knoten	$x [m]$	$z [m]$
1	0.0	0.0
2	4.0	0.0
3	0.0	4.0
4	4.0	4.0

Kantentafel			
Element	Knoten		$l_i [m]$
	Anf.	End.	
1	1	2	4.000
2	1	3	4.000
3	1	4	5.657
4	2	3	5.657
5	2	4	4.000
6	3	4	4.000

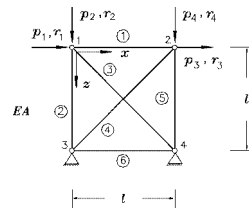


Tabelle 3.1: Knoten- und Kantentafel

Abbildung 3.5: Ebenes Fachwerk

Die Gleichung $\mathbf{A}^t \underline{s} = \underline{p}$ lautet mit der Abkürzung $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ausführlich geschrieben

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Die Hypermatrix \mathbf{K} ist im Falle von Stabtragwerken diagonal; im einzelnen ergibt sich für die reduzierte Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{K}_g = EA \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 & -1.000 & 0.000 \\ 0.354 & 1.354 & 0.000 & 0.000 \\ -1.000 & 0.000 & 1.354 & -0.354 \\ 0.000 & 0.000 & -0.354 & 1.354 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Damit lautet der Zusammenhang zwischen den äußeren Lasten \underline{p} und den Verformungen \underline{r} mit der inversen Steifigkeitsmatrix $\underline{r} = \mathbf{K}_g^{-1} \underline{p}$; also

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 2.135 & -0.558 & 1.693 & 0.442 \\ -0.558 & 0.885 & -0.442 & -0.116 \\ 1.693 & -0.442 & 2.135 & 0.558 \\ 0.442 & -0.116 & 0.558 & 0.885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Nun kann die direkte Beziehung zwischen den äußeren Lasten und den Stabendkräften, das sind in diesem Fall die Normalkräfte in den Stäben, hergestellt werden. Aufgrund der Gültigkeit nachfolgender Gleichungen $\underline{s} = \mathbf{K} \mathbf{A} \underline{r} = \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{K}_g^{-1} \underline{p}$ erhalten wir

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.442 & 0.116 & 0.442 & 0.116 \\ 0.558 & -0.885 & 0.442 & 0.116 \\ -0.789 & -0.164 & -0.626 & -0.164 \\ 0.626 & -0.164 & 0.789 & -0.164 \\ -0.442 & 0.116 & -0.558 & -0.885 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Wenn wir auf das Tragwerk mit einer Last einwirken, so erhalten wir Normalkräfte, welche Linearkombinationen aus den Einzellasten darstellen. Man erkennt an diesem Sachverhalt sofort die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, d.h. die Summe der Schnittgrößen (Verformungen) infolge einzelner Lastfälle entspricht den Schnittgrößen (Verformungen), welche unter der Summe der Lastfälle entstehen. Für unser Beispiel erhält man die Normalkräfte nach (3.41).

3.2.2 Kraftgrößenverfahren

3.2.2.1 Theorie in Matrixschreibweise

Auch das Kraftgrößenverfahren läßt sich in mehrere Teilschritte gliedern (siehe z.B. [52]). Wir gehen dabei von einem diskreten System aus; die Methode wird also nicht vom Kontinuum ausgehend

hergeleitet wie bei dem Weggrößenverfahren, obwohl die theoretische Allgemeingültigkeit beider Verfahren vergleichbar sind. Man könnte also auch mit der Kraftmethode kontinuierliche Probleme, die diskretisiert worden sind, berechnen.

1. Zuerst erfolgt die Festlegung eines statisch bestimmten Hauptsystems, indem durch Anwendung des Schnittprinzips eine bestimmte Anzahl von statisch unbestimmten, inneren Kraftgrößen frei gemacht wird. Sie werden statisch Unbestimmte genannt.
2. Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen im Hauptsystem infolge äußerer Belastungen. Dabei treten Relativverformungen in Richtung der statisch Unbestimmten auf.
3. Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen im statisch bestimmten Hauptsystem infolge von Einheitsbelastungen der statisch unbestimmten Größen. In Richtung der statisch Unbestimmten treten Relativverformungen aufgrund dieser Belastungen auf.
4. Berechnung der statisch Unbestimmten in einem Gleichungssystem, das mit Hilfe folgendem Sachverhalt entsteht. Die Summe der Relativverformungen infolge der statisch Unbestimmten (Unbekannten) und der Relativverformungen infolge äußerer Belastung muß identisch Null verschwinden.
5. Aus den statisch Unbestimmten werden Schnittgrößen, Verformungen, etc. abgeleitet.

Zur Herleitung des Kraftgrößenverfahrens werden die Gleichgewichtsgleichungen zunächst in allgemeiner Form benötigt. Sie lauten wie gehabt

$$\underline{p} = \mathbf{A}^t \underline{s}. \quad (3.42)$$

Die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t besitzt bei einem Tragwerk mit n Freiheitsgraden gerade n unabhängige Zeilen. Die Anzahl der Spalten der Matrix ist m , das die Anzahl der linear unabhängigen Stabendgrößen darstellt. Hier wollen wir nun voraussetzen, daß die Anzahl $r = m - n > 0$ gilt. Dann gibt es für die Gleichung (3.42) Lösungen der Form [108],

$$\underline{s} = \mathbf{B}_0 \underline{p} + \mathbf{B}_x \underline{k}, \quad (3.43)$$

wobei folgende Gleichungen zu gelten haben

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \mathbf{B}_0 &= \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^t \mathbf{B}_x &= \mathbf{O}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

\mathbf{B}_0 wird als die Matrix der Lastspannungszustände und die Matrix \mathbf{B}_x als die Matrix der Eigenspannungszustände bezeichnet. Der Vektor \underline{k} beinhaltet die statisch Unbestimmten, \underline{s} die Stabendgrößen und \underline{p} die äußeren Lasten. Die Matrizen \mathbf{B}_0 und \mathbf{B}_x können recht einfach ermittelt werden, wenn ein zulässiges Hauptsystem bekannt ist; wie dies im einzelnen geschieht, soll an dieser Stelle nicht beschrieben werden. Wir gehen im folgenden von der Existenz dieser Matrizen aus. Bisweilen haben wir lediglich die Gleichgewichtsbedingungen nach Gleichung (3.42) herangezogen. Es ist selbstverständlich, daß zur Lösung des Problems die kinematischen Bedingungen und die Werkstoffgleichungen eingearbeitet werden müssen. Wir wollen sie uns wieder ins Gedächtnis rufen. Die kinematischen Gleichungen lauten

$$\underline{v} = \mathbf{A} \underline{r}, \quad (3.45)$$

wobei \underline{v} die Verformungen der Elemente und \underline{r} die Knotenverschiebungen darstellen. Die Werkstoffgleichungen finden sich in Gleichung

$$\underline{s} = \mathbf{K} \underline{v} \quad (3.46)$$

wieder. Die inverse Beziehung der obigen Gleichung ist der Ausgangspunkt zur Ermittlung der statisch Unbestimmten \underline{k} . Es gilt mit der Tatsache, daß die Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ ist,

$$\underline{v} = \mathbf{F} \underline{s}. \quad (3.47)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.45) und danach (3.43) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{r} &= \underline{F} \underline{s} \\ \underline{A} \underline{r} &= \underline{F} (\underline{B}_0 \underline{p} + \underline{B}_x \underline{k}) \\ \underline{A} \underline{r} &= \underline{F} \underline{B}_0 \underline{p} + \underline{F} \underline{B}_x \underline{k}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Linksseitige Multiplikation mit \underline{B}_x^t

$$\underbrace{\underline{B}_x^t \underline{A}}_{\underline{O}} \underline{r} = \underline{B}_x^t \underline{F} \underline{B}_0 \underline{p} + \underline{B}_x^t \underline{F} \underline{B}_x \underline{k}. \quad (3.49)$$

ergibt die allgemein bekannten Gleichungen zur Bestimmung der statisch Unbestimmten

$$\underline{k} = -(\underline{B}_x^t \underline{F} \underline{B}_x)^{-1} (\underline{B}_x^t \underline{F} \underline{B}_0 \underline{p}). \quad (3.50)$$

Nach der Bestimmung der statisch Unbestimmten sind wir in der Lage die Stabendkräfte nach Gleichung (3.43) und anschließend die Elementverformungen mit der Werkstoffgleichung zu berechnen. Die Ermittlung der Knotenverschiebungen ist jetzt kein Problem mehr; man multipliziert die kinematische Gleichung mit \underline{B}_0^t von links und erhält

$$\underbrace{\underline{B}_0^t \underline{A}}_{\underline{E}} \underline{r} = \underline{B}_0^t \underline{v} \quad (3.51)$$

oder

$$\underline{r} = \underline{B}_0^t \underline{v}. \quad (3.52)$$

Dieses Verfahren ist im Zeitalter des Computers aus der Mode, da die Aufstellung der Matrizen der Last- und Eigenspannungszustände sehr viel schwieriger zu automatisieren ist als die Gleichungen des Weggrößenverfahrens.

Damit ergeben sich die folgende Schritte zur Berechnung von Tragsystemen mit dem Kraftgrößenverfahren.

1. Bestimmung der Gleichgewichtsmatrix \underline{A}^t
2. Wahl der statisch Unbestimmten bzw. Festlegung der Matrizen \underline{B}_0 und \underline{B}_x
3. Bereitstellung der Flexibilitätsmatrix \underline{F}
4. Besetzung des Lastvektors \underline{p}
5. Bestimmung der statisch Unbestimmten $\underline{k} = (\underline{B}_x^t \underline{F} \underline{B}_x)^{-1} (-\underline{B}_x^t \underline{F} \underline{B}_0 \underline{p})$
6. Berechnung der Stabendkräfte \underline{s} , der Elementverformungen \underline{v} und der Knotenverschiebungen \underline{r}

3.2.2.2 Beispiel: ebenes Fachwerk



Abbildung 3.6: Ebenes Fachwerk mit den statisch Unbestimmten

Auch hier wollen wir das vorige Beispiel heranziehen. Dabei wollen wir die Normalkräfte der Elemente 4 und 6 als die statisch Unbestimmten deklarieren. Das Hauptsystem besteht also aus den Stäben 1, 2, 3 und 5. Die Matrix der Lastspannungszustände berechnet sich nun wie folgt; man läßt die äußere Last 1 auf den Knoten 1 wirken, und zwar in die Richtung des ersten Freiheitsgrades dieses Knotens. Anschließend werden im statisch bestimmten Hauptsystem die Schnittgrößen ermittelt, die dieser Einheitslast das Gleichgewicht halten. Dies wird mit sämtlichen Freiheitsgraden analog durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Berechnung werden in der Matrix der Lastspannungszustände \mathbf{B}_0 wie folgt angeordnet

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2c & 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Wie im theoretischen Teil bereits erklärt worden ist, besitzt diese Matrix im Fall der Fachwerkberechnung - denn die Anzahl der Stäbe entspricht hier der Anzahl der statisch unabhängigen Stabendgrößen - so viele Zeilen wie Stäbe vorhanden sind. Die Zeilen der statisch Unbestimmten in der Matrix \mathbf{B}_0 sind Nullzeilen. Jede Spalte der Matrix steht für einen Freiheitsgrad des Tragwerkes. Diejenigen Elemente der Spalte eines Freiheitsgrades können ungleich Null vorhanden sein, welche zu einem Stab des Hauptsystems zählen, also hier nur die ersten, zweiten, dritten und fünften Elemente, da die Elemente 4 und 6 zu den statisch Unbestimmten gehören.

Hier wollen wir die dritte Spalte der Matrix etwas genauer beleuchten. Die Spaltenelemente werden berechnet, indem eine Einheitslast in Richtung des Freiheitsgrades 3, dies ist die x -Richtung des Knotens 2, aufgebracht wird. Diese Einheitslast führt zu den Schnittgrößen im Hauptsystem, die dann die Spaltenelemente ergeben. In der Spalte 3 finden wir also in der ersten Zeile eine 1, in der zweiten Zeile ebenso und in der dritten Zeile den Wert $2c$. Dies sind die Schnittgrößen infolge der äußeren Last 1 des dritten Freiheitsgrades, des Knoten 2 in x -Richtung. Also einfach: Zug im Stab 1 und 2 von der Größe 1 und Druck im Diagonalstab 3 vom Betrag $2c$.

Die Matrix der Eigenspannungszustände \mathbf{B}_x kommt folgendermaßen zustande. Man bringt gegenläufige Einheitskräfte in die Richtung der statisch Unbestimmten an und ermittelt mit diesen die Stabendgrößen im statisch bestimmten Hauptsystem. Wir wollen dies an der nachstehenden Matrix

$$\mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 0 & -c \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -c \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

verdeutlichen, indem wir die Spalte 1 der Matrix betrachten. Die statisch Unbestimmte k_1 verursacht im statisch bestimmten Hauptsystem natürlich keine Kräfte, denn sie verbindet zwei Festpunkte. Aus diesem Grund sind die Spalten der Matrix mit Ausnahme der statisch Unbestimmten selbst (sechste Spalte) identisch Null. Die zweite Unbestimmte (k_2) dagegen führt zu Stabkräften im Hauptsystem. In der Matrix \mathbf{B}_0 gibt es Nullzeilen an den Stellen der statisch Unbestimmten, in diesen Zeilen gibt es in der Matrix \mathbf{B}_x jeweils einen Wert 1. Durch Nachrechnen kann man sich leicht davon überzeugen, daß die auf diese Weise erzeugten Matrizen den Gleichungen nach (3.44) genügen. Nach kurzer Berechnung

erhält man die statisch Unbestimmten in Abhängigkeit von den äußeren Lasten \underline{p} zu

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.626 & -0.164 & 0.789 & -0.164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Mit diesen statisch Unbestimmten ist es nun sehr einfach möglich die Schnittgrößen \underline{s} nach Gleichung (3.43), die Elementverformungen \underline{v} nach Gleichung (3.47) und die Knotenverschiebungen \underline{r} nach Gleichung (3.52) zu ermitteln. Man kann sich davon überzeugen, daß sich die Ergebnisse des Weggrößenverfahrens ergeben.

Zur Berechnung mechanischer Strukturen mit der Ausgleichsrechnung

Beziehungen zwischen der geodätischen Ausgleichsrechnung und der Elastomechanik wurden bereits im letzten Jahrhundert hergestellt [22]. Finsterwalder berichtet schon 1903 über Analogien zwischen der Ausgleichsrechnung und Statik [20]. Friedrich gibt einen Beweis für die Richtigkeit der Kleinsten Quadrate Methode mit Hilfe von Grundgesetzen der Mechanik [25]. In jüngerer Vergangenheit entstand die Dissertation von Linkwitz [56], die Streckennetze nach der Theorie elastischer Systeme bestimmt; Jäger analysiert und optimiert geodätische Netze mit mechanischen Verfahren [49]. Diese Arbeiten haben eines gemeinsam: sie versuchen mit mechanischen Methoden für geodätische Systeme Aussagen zu treffen bzw. Beurteilungskriterien zu schaffen. Erst später wird der umgekehrte Weg, also von der Ausgleichsrechnung zur Mechanik, eingeschlagen, indem die Seilnetzberechnung als geodätische Ausgleichsaufgabe verstanden und gelöst wird [57], [58], [60]. Wir werden in der vorliegenden Arbeit grundsätzlich beide Richtungen betrachten, wobei der Schwerpunkt eindeutig auf der Übertragung ausgleichungstechnischer Methoden zur Berechnung mechanischer Strukturen liegt.

Der Transfer von Methoden bzw. Verfahren der Ausgleichsrechnung auf die Mechanik wird sehr allgemein untersucht. Die dazu erforderlichen Schritte werden im folgenden kurz skizziert. Sämtliche Ausgleichsstrategien lassen sich im allgemeinen Ausgleichskonzept bündeln, das mit der Methode der kleinsten Quadrate arbeitet; im zweiten Kapitel wurde sehr ausführlich dargelegt, daß alle ausgleichungstechnischen Strategien auf dem Prinzip - gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen zum Minimum - basieren. Im dritten Kapitel wurden zwei diskrete Verfahren zur Berechnung mechanischer Strukturen vorgestellt: und zwar die Weg- und die Kraftmethode. Die Herleitung dieser Methoden erfolgte unter Beachtung der zuvor ausführlich beschriebenen Gleichgewichts-, Verträglichkeits- und Werkstoffbeziehungen. Dies ist die übliche Vorgehensweise zur Beschreibung des Weg- und Kraftgrößenverfahrens. Die Übertragung der geodätischen Ausgleichsrechnung auf die statischen Verfahren gelingt nur unter der Voraussetzung, daß ihnen ein Minimalprinzip zugrunde liegt; dies ist hier der Fall, denn bei den Ausführungen zur mathematischen Theorie der Elastizität wurde das in diesem Fall anwendbare Prinzip der minimalen Gesamtenergie vorgestellt. Die beiden Verfahren, also das Weg- und Kraftgrößenverfahren, werden im nächsten Abschnitt mit dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie formuliert, damit geodätische und mechanische Methoden zur Berechnung von Netzen miteinander verglichen bzw. aufeinander übertragen werden können.

4.1 Energiemethoden zur Berechnung mechanischer Strukturen

4.1.1 Lineares Weggrößenverfahren

4.1.1.1 Ohne Vorverformungen

Das Prinzip der minimalen Gesamtenergie Π lautet mit den für das Weggrößenverfahren üblichen Bezeichnungen

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v}}_{\Pi_i} - \underbrace{\underline{p}^t \underline{r}}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (4.1)$$

Die Gesamtenergie besitzt zwei Anteile; Π_i ist die innere Energie und Π_a das Potential der äußeren Lasten. Für unsere Betrachtungen ist es unerheblich, ob es sich bei den Einzelkräften \underline{p} um tatsächliche Einzelkräfte handelt oder um sogenannte Ersatzknotenlasten, die durch Integration entstanden sind. Im nächsten Schritt wollen wir die Nebenbedingung $\underline{v} = \mathbf{A} \underline{r}$ einhalten. Diese Nebenbedingung

kann mit Hilfe sogenannter Lagrangescher Multiplikatoren \underline{s} in ein erweitertes Potential (stationäre Gesamtenergie) aufgenommen werden. Man erhält sofort

$$\Pi = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v} - \underline{s}^t (\underline{v} - \mathbf{A} \underline{r}) - \underline{p}^t \underline{r} \Rightarrow \text{stat.} \quad (4.2)$$

Dabei ist beiden Potentialen, zwar etwas ungenau aber sehr bewußt, dieselbe Bezeichnung Π zugeordnet, denn ihr Wert im Lösungspunkt ist gleich groß, da der Energieanteil mit dem Vektor der Lagrangeschen Multiplikatoren \underline{s} im Konvergenzpunkt identisch Null verschwindet.

Geläufiger als das Potential sind die drei Hauptgleichungen des Weggrößenverfahrens bzw. der Elastizitätstheorie überhaupt.

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \mathbf{A}^t \underline{s} && \boxed{\text{Gleichgewicht}} \\ \underline{s} &= \mathbf{K} \underline{v} && \boxed{\text{Werkstoff}} \\ \underline{v} &= \mathbf{A} \underline{r} && \boxed{\text{geometrische Verträglichkeit}} \end{aligned}$$

Unbekannte dieser Gleichungssysteme sind die Verformungen sowohl der n Elemente als auch der m freien Knoten, sowie die n Stabkräfte. Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Analogiebetrachtungen werden die oben eingeführten Matrizen und Vektoren noch einmal in aller Ausführlichkeit definiert. Zunächst die Vektoren und dann die Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{s}_{(1,n)}^t &= [s_1, s_2, \dots, s_n] && \text{Vektor der unabhängigen Stabendkräfte} \\ \underline{p}_{(1,m)}^t &= [p_1, p_2, \dots, p_m] && \text{Vektor der äußeren Lasten} \\ \underline{v}_{(1,n)}^t &= [v_1, v_2, \dots, v_n] && \text{Vektor der Elementverformungen} \\ \underline{r}_{(1,m)}^t &= [r_1, r_2, \dots, r_m] && \text{Vektor der Knotenverschiebungen} \\ \mathbf{K}_{(n,n)} &= && \text{reduzierte Steifigkeitsmatrix} \\ \mathbf{A}_{(m,n)}^t &= && \text{Gleichgewichtsmatrix} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Verträglichkeitsgleichungen in die Werkstoffgleichungen und Multiplikation der Gleichgewichtsmatrix von links, erhält man die für dieses Verfahren üblichen Gleichungen

$$\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \underline{r} = \underline{p}, \quad (4.3)$$

mit deren Hilfe man die unbekanntenen Knotenverschiebungen \underline{r} bestimmt; aus diesen lassen sich die Elementverformungen \underline{v} und anschließend die Stabendkräfte \underline{s} berechnen.

4.1.1.2 Mit Vorverformungen

Wenn man Tragwerke mit Vorverformungen (z.B. aus Imperfektion oder als Folge einer Temperaturdifferenz) berechnen möchte, muß die Elementgeometrie im unverformten Zustand vorhanden sein. Diese Größen werden im Vektor \underline{l} für alle Elemente gespeichert. Die Ausgangsgeometrie sei durch den Vektor \underline{x}_0 gegeben. Die Berechnung der verformten Elementgeometrie mit der gegebenen Ausgangslage \underline{x}_0 ergibt nun eine Differenz \underline{v}_u , die als gegeben und bekannt betrachtet werden kann. Es gilt also

$$\underline{v}_u = \underline{f}(\underline{x}_0) - \underline{l}. \quad (4.4)$$

Die wirklichen Elementverformungen, die durch Vorverformung und aus Einwirkungen infolge von Elementkräften entstehen, werden wie immer mit \underline{v} bezeichnet. Für sie gilt, wenn mit \underline{x} die verformte

Tragwerksgeometrie (Gleichgewichtsgeometrie) bezeichnet und wenn nach Taylor unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung entwickelt wird,

$$\underline{v} = \underline{f}(\underline{x}) - \underline{l} = \mathbf{A}\underline{\Delta x} + \underline{f}(\underline{x}_0) - \underline{l} = \mathbf{A}\underline{\Delta x} - \underline{v}_u, \quad (4.5)$$

wobei $\underline{\Delta x} = \underline{x} - \underline{x}_0 = \underline{r}$ darstellt. Für die Elementverformungen kann also geschrieben werden

$$\underline{v} = \mathbf{A}\underline{r} - \underline{v}_u. \quad (4.6)$$

Wir erhalten das Potential als Funktion der Knotenverschiebungen \underline{r} , der Stabkräfte \underline{s} und der Elementverformungen \underline{v} zu

$$\Pi = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v} - \underline{s}^t (\underline{v} - \mathbf{A}\underline{r} + \underline{v}_u) - \underline{p}^t \underline{r} \Rightarrow \text{stat.} \quad (4.7)$$

In obiger Reihenfolge nach den Unbekannten differenziert und zu Null gesetzt, erhält man die drei Hauptgleichungen des Weggrößenverfahrens

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \mathbf{A}^t \underline{s} \\ \underline{s} &= \mathbf{K} \underline{v} \\ \underline{v} &= \mathbf{A}\underline{r} - \underline{v}_u. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nach kurzem Umformen ergeben sich die Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Knotenverschiebungen

$$\underline{r} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \underline{v}_u + \underline{p}). \quad (4.9)$$

Aus diesen lassen sich die Elementverformungen \underline{v} durch Einsetzen in die dritte Gleichung von (4.8) bestimmen; sodann die Stabendkräfte \underline{s} mit der zweiten Gleichung von (4.8) und den bereits ermittelten Verformungen \underline{v} . Diese Gleichungen gelten natürlich nur im linearen Fall.

4.1.2 Lineares Kraftgrößenverfahren

4.1.2.1 Ohne Vorverformungen

Das Prinzip der minimalen Gesamtenergie Π wird mit den für das Kraftgrößenverfahren üblichen Bezeichnungen zur Anwendung gebracht. Dabei wird von Vorverformungen der Tragwerkselemente abgesehen; Vorspannungen, Temperaturlastfälle bzw. Imperfektionen z.B. sind demnach bei folgendem Ansatz unzulässig. Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v}}_{\Pi_i} - \underline{k}_1^t (\mathbf{B}_x^t \underline{v} - \underline{0}) - \underline{k}_2^t (\mathbf{B}_0^t \underline{v} - \underline{r}) - \underbrace{\underline{p}^t \underline{r}}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat.} \quad (4.10)$$

Sie besitzt zwei von Null verschiedene Anteile; Π_i ist die innere Energie und Π_a das Potential der äußeren Lasten. Die nicht näher bezeichneten Energieanteile verschwinden im Extrempunkt. Sie sorgen dafür, daß die Bedingungsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_x^t \underline{v} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_0^t \underline{v} &= \underline{r} \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren \underline{k}_1 und \underline{k}_2 eingehalten werden. Das Gesamtpotential Π ist eine Funktion der unbekanntenen Verformungen \underline{v} , der Lagrangeschen Multiplikatoren \underline{k}_1 und \underline{k}_2 und der Knotenverschiebungen \underline{r} . Die Ableitungen des Gesamtpotentials nach diesen Unbekannten ergibt folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{K} \underline{v} - \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_0 \underline{k}_2 = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{k}_1} &= \mathbf{B}_x^t \underline{v} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{k}_2} &= \mathbf{B}_0^t \underline{v} - \underline{r} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{r}} &= \underline{k}_2 - \underline{p} = \underline{0}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Die letzte Gleichung wird in die erste eingesetzt. Man erhält

$$\mathbf{K} \underline{v} - \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_0 \underline{p} = \underline{0}.\tag{4.13}$$

Durch Multiplikation der Gleichung (4.13) mit $\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1}$ von links ergibt sich das für das Kraftgrößenverfahren bekannte Gleichungssystem zur Ermittlung der statisch Unbestimmten \underline{k}_1 .

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_x^t \underline{v} - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 &= -\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p}\end{aligned}\tag{4.14}$$

Nach der Berechnung der statisch Unbestimmten werden die Verformungen \underline{v} ermittelt, um mit der dritten Gleichung aus (4.12) die Knotenverschiebungen \underline{r} zu bestimmen. Auch hier seien n Elemente und m freie Knoten vorhanden. Die Differenz zwischen der Anzahl der Elemente n und der Anzahl der Knoten m ist die Redundanz r , also $r = n - m$ (nicht zu verwechseln mit den Knotenverschiebungen \underline{r}). Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Übertragung auf den allgemeinen Ausgleichungsansatz sollen die oben genannten Vektoren und Matrizen noch einmal ausführlich beschrieben werden.

$\underline{v}_{(1,n)}^t$	$= [v_1, v_2, \dots, v_n]$	Vektor der Elementverformungen
$\underline{s}_{(1,n)}^t$	$= [s_1, s_2, \dots, s_n]$	Vektor der unabhängigen Stabendgrößen
$\underline{p}_{(1,m)}^t$	$= [p_1, p_2, \dots, p_m]$	Vektor der äußeren Lasten
$\underline{r}_{(1,m)}^t$	$= [r_1, r_2, \dots, r_m]$	Vektor der Knotenverschiebungen
$\underline{k}_{1(1,r)}^t$	$= [k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}]$	Vektor der Lagrangemultiplikatoren (statisch Unbestimmte)
$\underline{k}_{2(1,m)}^t$	$= [k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2m}]$	Vektor der Lagrangemultiplikatoren (Lasten)
$\mathbf{K}_{(n,n)}$		reduzierte Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{B}_{x(r,n)}^t$		Matrix der Eigenspannungszustände
$\mathbf{B}_{0(m,n)}^t$		Matrix der Lastspannungszustände
$\mathbf{A}_{(m,n)}^t$		Gleichgewichtsmatrix
$\mathbf{A}_{e(m,r)}^t$		Erweiterungsmatrix

Im folgenden soll deutlich gemacht werden, wie man die Matrizen \mathbf{B}_x und \mathbf{B}_0 ermittelt. Zu diesem Zweck wollen wir uns die Gleichgewichtsgleichung, die uns vom Weggrößenverfahren bekannt ist,

$$\mathbf{A}^t \underline{s} = \underline{p}\tag{4.15}$$

ins Gedächtnis rufen. Nun werden wir eine Matrix \mathbf{A}_e^t mit n Spalten und r Zeilen definieren und zwar dergestalt, daß in jeder Zeile der Matrix ein Nichtnullelement mit dem Wert 1 vorhanden ist. Dieses Nichtnullelement trifft bei der Multiplikation mit dem Vektor der unabhängigen Stabendkräfte \underline{s} auf eine statisch Unbestimmte. Weiterhin wollen wir annehmen, daß sämtliche statisch Unbestimmte im Vektor der Stabendkräfte \underline{s} am Anfang stehen und das Einselement der ersten Zeile der Erweiterungsmatrix \mathbf{A}_e^t bei der Multiplikation mit \underline{s} die erste statisch Unbestimmte, das zweite Einselement die zweite, bis schließendlich das r te Einselement der r ten Zeile die letzte statisch Unbestimmte trifft. Da die statisch Unbestimmte beim Kraftgrößenverfahren (im Hauptsystem) nicht vorhanden sind, gilt

$$\mathbf{A}_e^t \underline{s} = \underline{0}. \quad (4.16)$$

Die statisch Unbestimmte stehen am Anfang des Vektors \underline{s} . Dies wollen wir - wie oben ausführlich beschrieben wurde - ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen. Dann ergibt sich für die Erweiterungsmatrix \mathbf{A}_e^t sofort

$$\left[\mathbf{A}_e^t \right] = \left[\mathbf{E} \quad \mathbf{O} \right]. \quad (4.17)$$

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir für die Gleichung (4.16)

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ s_r &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die unabhängigen Stabendkräfte, die durch diese Maßnahme zu Null gesetzt werden, können nicht beliebig gewählt werden. Sie sind so zu bestimmen, daß ohne sie - denn sie sind ja zu Null gesetzt worden und damit gewissermaßen nicht mehr vorhanden - ein statisch bestimmtes Hauptsystem übrig bleibt. Wenn dies beachtet wird, dann besitzt die Matrix \mathbf{A}_g^t , welche sich aus der Erweiterungsmatrix \mathbf{A}_e^t und der Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t zusammensetzt, eine Inverse, die ebenso in zwei Teilmatrizen partitioniert werden kann. Diese Inverse ist uns wohlbekannt, sie baut sich aus \mathbf{B}_x und \mathbf{B}_0 zusammen. Es gilt demnach

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_e^t \\ \mathbf{A}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e^t \mathbf{B}_x & \mathbf{A}_e^t \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{A}^t \mathbf{B}_x & \mathbf{A}^t \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Im folgenden werden zwei Beziehungen, die nachfolgend häufig benützt werden, explizit angegeben. Sie können direkt aus der obigen Gleichung (4.19) gelesen werden, womit demnach gilt

$$\mathbf{A}^t \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^t \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (4.20)$$

und

$$\mathbf{A}^t \mathbf{B}_x = \mathbf{O}. \quad (4.21)$$

Nun wollen wir uns die Gleichung der geometrischen Verträglichkeit vor Augen führen. Sie lautet

$$\underline{v} = \mathbf{A} \underline{r}. \quad (4.22)$$

Auch diese Gleichung wird erweitert, so daß sich

$$\begin{bmatrix} \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

ergibt. Diese Gleichung (4.23) wird mit \mathbf{B}_x^t und \mathbf{B}_0^t multipliziert; man erhält sogleich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_x^t \\ \mathbf{B}_0^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x^t \\ \mathbf{B}_0^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Wir erhalten also die Bedingungsgleichungen (4.11), die einzuhalten mit Hilfe der Korrelaten \underline{k}_1 und \underline{k}_2 möglich wird. Damit wird das Vorgehen bei dem Kraftgrößenverfahren deutlich. Die Wahl der statisch Unbestimmten bestimmt die Reihenfolge der unabhängigen Stabendkräfte. Dabei werden die statisch Unbestimmten in unserem Fall an den Anfang des Vektors \underline{s} sortiert. Danach wird die Bestimmung der Gleichgewichtsmatrix durchgeführt, die, mit der Erweiterungsmatrix zusammen, invertiert wird. Auf diese Weise erhalten wir die Matrizen der Last- und Eigenspannungszustände. Sämtliche Ausgangsgrößen sind nun vorhanden, und die Berechnung kann so erfolgen, wie oben beschrieben.

Es wurde bereits dargelegt, daß mit diesem Ansatz keine Vorverformungen zu bestimmen sind. Aus diesem Grund scheint eine Übertragung auf die Ausgleichsrechnung nicht sinnvoll zu sein, denn dort sind keine äußeren Lasten vorhanden, wohl aber Beobachtungsfehler, die in der mechanischen Betrachtungsweise z.B. als Vorspannungen, Imperfektionen, oder allgemein ausgedrückt als Vorverformungen vorkommen. Deshalb wird das Kraftgrößenverfahren im folgenden mit den Anteilen aus Vorverformungen hergeleitet.

4.1.2.2 Mit Vorverformungen

Wenn man das Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen berechnen möchte, so muß die Geometrie der Tragwerkelemente im unverformten Zustand gegeben sein. Die geometrischen Größen, die diese Information beinhalten, werden im Vektor \underline{l} abgelegt, der selbstverständlich die Dimension n besitzt. Die Ausgangsgeometrie des Systemes sei durch den Vektor \underline{x}_0 gegeben. Sind Vorverformungen vorhanden, so ergibt die Berechnung der geometrischen Größen, die sich auf die Ausgangslage \underline{x}_0 beziehen und insofern eine Funktion $\underline{f}(\underline{x}_0)$ eben dieser Ausgangslage sind, eine Differenz zu der unverformten Geometrie, die in \underline{l} gegeben ist. Es gilt also die wichtige Beziehung

$$\underline{v}_u = \underline{f}(\underline{x}_0) - \underline{l}. \quad (4.25)$$

Auch hier werden der Übersichtlichkeit wegen die neu definierten Vektoren und weitere ausführlich geschrieben

$\underline{l}_{(1,n)}^t$	$= [l_1, l_2, \dots, l_n]$	Vektor der unverformten Elementgrößen
$\underline{x}_{0(1,m)}^t$	$= [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]$	Vektor der Ausgangsgeometrie
$\underline{x}_{(1,m)}^t$	$= [x_1, x_2, \dots, x_m]$	Vektor der Gleichgewichtsgeometrie
$\underline{f}^t(\underline{x}_0)_{(1,n)}$	$= [f_1(\underline{x}_0), f_2(\underline{x}_0), \dots, f_n(\underline{x}_0)]$	Vektor der berechneten Elementgrößen
$\underline{v}_{u(1,n)}^t$	$= [v_{u1}, v_{u2}, \dots, v_{un}]$	Vektor der Elementvorverformungen

Die wirklichen Elementverformungen, die durch Vorverformung und aus Einwirkungen infolge von Elementkräften entstehen, werden nach wie vor mit \underline{v} bezeichnet. Für sie gilt, wenn mit \underline{x} die verformte Tragwerksgeometrie (Gleichgewichtsgeometrie) bezeichnet wird, nun

$$\underline{v} = \underline{f}(\underline{x}) - \underline{l} = \mathbf{A}\underline{\Delta x} + \underline{f}(\underline{x}_0) - \underline{l} = \mathbf{A}\underline{\Delta x} - \underline{v}_u, \quad (4.26)$$

wobei $\underline{\Delta x} = \underline{x} - \underline{x}_0 = \underline{r}$ darstellt. Für die Elementverformungen kann also geschrieben werden

$$\underline{v} = \mathbf{A}\underline{r} - \underline{v}_u. \quad (4.27)$$

Mit Hilfe der Gleichung (4.27) lassen sich die Bedingungsgleichungen sehr einfach herleiten; die Multiplikation der obigen Gleichung mit \mathbf{B}_x^t und \mathbf{B}_0^t von links ergibt mit (4.11) die einzuhaltenden Bedingungsgleichungen. Also

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_x^t(\underline{v} + \underline{v}_u) &= \mathbf{B}_x^t \mathbf{A} \underline{r} = \underline{0} \\ \mathbf{B}_0^t(\underline{v} + \underline{v}_u) &= \mathbf{B}_0^t \mathbf{A} \underline{r} = \underline{r}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Das Gesamtpotential des Kraftgrößenverfahrens mit Vorverformungen lautet nunmehr

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v}}_{\Pi_i} - \underline{k}_1^t (\mathbf{B}_x^t (\underline{v} + \underline{v}_u) - \underline{0}) - \underline{k}_2^t (\mathbf{B}_0^t (\underline{v} + \underline{v}_u) - \underline{r}) - \underbrace{\underline{p}^t \underline{r}}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat..} \quad (4.29)$$

Wir erhalten folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{K} \underline{v} - \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_0 \underline{k}_2 = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{k}_1} &= \mathbf{B}_x^t (\underline{v} + \underline{v}_u) = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{k}_2} &= \mathbf{B}_0^t (\underline{v} + \underline{v}_u) - \underline{r} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{r}} &= \underline{k}_2 - \underline{p} = \underline{0}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Die letzte Gleichung wird in die erste eingesetzt. Man erhält ganz analog zum Verfahren ohne Vorverformungen

$$\mathbf{K} \underline{v} - \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_0 \underline{p} = \underline{0}.\quad (4.31)$$

Die Multiplikation der Gleichung (4.31) mit $\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1}$ von links ergibt in diesem Fall

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_x^t \underline{v} - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_x^t (\mathbf{A} \underline{r} - \underline{v}_u) - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_x^t \mathbf{A} \underline{r} - \mathbf{B}_x^t \underline{v}_u - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 - \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 &= -\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} - \mathbf{B}_x^t \underline{v}_u.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Nach der Bestimmung von \underline{k}_1 wird aus der Werkstoffgleichung die Elementverformung \underline{v} ermittelt; mit diesem Vektor und dem gegebenen Vektor \underline{v}_u werden die Knotenverschiebungen \underline{r} berechnet. Damit ist die Bestimmung der Gleichgewichtslage $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{r}$ möglich.

Im folgenden soll das Kraftgrößenverfahren für Vorverformungen bei der Abwesenheit von äußeren Lasten kurz skizziert werden. Die Berechnung der statisch Unbestimmten ergibt nach (4.32)

$$\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{k}_1 = -\mathbf{B}_x^t \underline{v}_u.\quad (4.33)$$

Die Bestimmung der Stabendkräfte erhält man aus (4.31) zu

$$\underline{s} = \mathbf{B}_x \underline{k}_1.\quad (4.34)$$

An dieser Stelle wird noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Formulierung nur für den Fall linearer Zusammenhänge gilt, keinesfalls darf also hier iteriert werden.

4.2 Übertragung des allgemeinen Ausgleichungsansatzes auf mechanische Strukturen

In den folgenden Abschnitten wird die Transformation oder die Abbildung der geodätischen Ausgleichungsrechnung auf die Verfahren der Mechanik sehr allgemein durchgeführt; die Übertragung der Ausgleichungsrechnung auf das Weg- und Kraftgrößenverfahren wird vollzogen. An dieser Stelle wollen wir die Begriffe Anwendung, Übertragung, Abbildung bzw. Transformation noch einmal deutlich machen, die für einen einzigen Sachverhalt stehen. Er wird nun erläutert: netzartspezifisches, d.h. unterschiedliches in verschiedenen Netzen, steht der Vereinheitlichung der gesamten Netzberechnung entgegen. Wenn es gelingen soll, *eine* Netztheorie für die unterschiedlichen Netzarten zu entwickeln, dann müssen die netzartabhängigen Faktoren aufeinander abgebildet, transformiert bzw. übertragen werden können; diese aufeinander abgebildeten Größen werden als analoge Größen (Analogika) oder Pendants bezeichnet. Es wurde schon mehrfach erwähnt, daß nur Netzarten angesprochen sind, deren Lösung durch die Minimierung eines skalaren Wertes erzielt wird. Dies ist hier der Fall, die Ausgleichungsrechnung minimiert die Quadratsumme der Verbesserungen und die Mechanik arbeitet nach dem Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials. Es wird sich zeigen, daß die Übertragung gelingen wird. Somit können Tragwerke, die man mit dem Weg- oder Kraftgrößenverfahren berechnen kann, nunmehr mit der Ausgleichungsrechnung analysiert werden; und die Ausgleichungsrechnung ist zweifelsfrei ein mächtiges Instrument zur Berechnung von Netzen. Nach diesen allgemeinen Ausführungen werden wir nun genauere Zuordnungen treffen.

1. Die vermittelnde Ausgleichung mit den vorgegeben Konstanten \underline{p} kann auf das Weggrößenverfahren abgebildet werden bzw. ist einem geometrisch nichtlinearen Weggrößenverfahren äquivalent.
2. Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen kann auf das Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten transformiert werden bzw. entspricht einem geometrisch nichtlinearen Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten; die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten einem allgemeinen geometrisch nichtlinearen Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen und äußeren Lasten.

Die exakte Übertragung der Verfahren vermittelnde oder bedingte Ausgleichung auf das Weg- oder Kraftgrößenverfahren schließt sich an.

4.2.1 Vermittelnde Ausgleichung und Weggrößenverfahren

Nachfolgend wird das aus dem allgemeinen Ausgleichungskonzept abgeleitete Verfahren der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen auf das Weggrößenverfahren, das mit dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie formuliert ist, transformiert. Dazu stellen wir das Potential der vermittelnden Ausgleichung als Funktion der unbekanntenen Koordinaten, Verbesserungen und Korrelaten auf, erweitern es um die Produkte aus den gegebenen Konstanten \underline{p} mit den Punktverschiebungen $\underline{x} - \underline{x}_0$ und schreiben

$$\Phi(\underline{x}, \underline{v}, \underline{t}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t \underline{P} \underline{v} - \underline{t}^t (\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) - \underline{p}^t (\underline{x} - \underline{x}_0) \Rightarrow \text{stat.} \quad (4.35)$$

Φ wird minimal, wenn die Ableitungen von Φ nach den Unbekannten verschwinden, wenn also nachfolgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{t} - \underline{p} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} &= \underline{P} \underline{v} - \underline{t} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{t}} &= -(\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nach einigem Umformen erhält man die Normalgleichungen für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (mit dem um die gegebenen Konstanten \underline{p} erweiterten Potential) und der durchaus

üblichen Betrachtungsweise nichtlinearer Fehlergleichungen, indem man die Jakobimatrix wie gewöhnlich mit \mathbf{A}^t bezeichnet,

$$\underline{\Delta x}_j = \underline{x}_j - \underline{x}_{j-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} (f(\underline{x}_{j-1}) - \underline{l}) + \underline{p}) . \quad (4.37)$$

Auch hier werden die Matrizen und Vektoren genau beschrieben

$\underline{t}_{(1,n)}^t$	$= [t_1, t_2, \dots, t_n]$	Vektor der Korrelaten
$\underline{p}_{(1,m)}^t$	$= [p_1, p_2, \dots, p_m]$	Vektor der willkürlich eingeführten Konstanten
$\underline{v}_{(1,n)}^t$	$= [v_1, v_2, \dots, v_n]$	Vektor der Verbesserungen
$\underline{l}_{(1,n)}^t$	$= [l_1, l_2, \dots, l_n]$	Vektor der Beobachtungen
$\underline{x}_{(1,m)}^t$	$= [x_1, x_2, \dots, x_m]$	Vektor der Unbekannten
$\underline{f}^t(\underline{x})_{(1,n)}$	$= [f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})]$	Vektor der Funktionen für die Gleichungen zwischen ausgeglichenen Beobachtungen $\underline{l} + \underline{v}$ und den Unbekannten \underline{x} .
$\mathbf{P}_{(n,n)}$		Gewichtsmatrix
$\left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)_{(m,n)}^t$		Jakobimatrix .

Der sachkundige Leser erkennt sofort die formale Identität der Gleichungssysteme (4.37) und (4.9); der Grund hierfür liegt auf der Hand. Die Ausgleichsrechnung auf der einen Seite minimiert die gewogene Quadratsumme der Verbesserungen abzüglich des Produktes aus Verschiebungswegen mit konstanten Größen; in unserem allgemeinen Ansatz sind diese Werte \underline{p} gewissermaßen künstlich eingeführt worden, damit die Übertragung der Ausgleichsrechnung auf das Weggrößenverfahren möglich wird. Das Weggrößenverfahren auf der anderen Seite minimiert die Gesamtenergie des Systemes, also die innere Formänderungsenergie abzüglich des Potentials der äußeren Lasten. Im einzelnen ergeben sich folgende Analogika, Pendants, Ur- und Abbilder: die Methode der kleinsten Quadrate steht dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie gegenüber; dies ist selbstverständlich, denn nur dadurch ist die Vereinheitlichung möglich geworden. Darunter ergeben sich als Spezialfall dieser allgemeinen Betrachtung die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Konstanten, welche das Weggrößenverfahren der Elastostatik zum Analogon hat.

In der geodätischen Ausgleichsrechnung ist man sich der Tatsache, die gewichtete Quadratsumme von Verbesserungen zu minimieren, sehr bewußt. In der Statik werden sehr häufig die aus dem Minimalprinzip der Gesamtenergie abgeleiteten Gleichungen, also die Gleichgewichts-, Werkstoff- und Verträglichkeitsbedingungen, als die Hauptbeziehungen der Elastizitätstheorie angesehen. Aber zurück zu den Pendants, die bei der Transformation aufeinander abgebildet werden. Die sehr unterschätzten Kontrollgleichungen bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen entsprechen den Gleichgewichtsgleichungen des Weggrößenverfahrens. Eine nicht näher zu benennende Beziehung in der Ausgleichsrechnung, die mit den Verbesserungen und Gewichten der Beobachtungen verknüpft ist, bildet sich auf das Werkstoffgesetz ab, das den Zusammenhang zwischen den Elementverformungen und den Kräften herstellt. In der vermittelnden Ausgleichsrechnung bleiben die Größen, die bei der Transformation in die Mechanik zu Kräften werden, ungenannt. Die Fehler- bzw. Verbesserungsgleichungen werden in der Statik als kinematische oder geometrische Verträglichkeitsbedingungen bezeichnet.

Diese wichtigen und alle weiteren Entsprechungen werden nun tabellarisch aufgezeigt.

Die Analogien zwischen der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen und dem Weggrößenverfahren der Mechanik im Überblick

Methode der kleinsten Quadrate

Prinzip der minimalen Gesamtenergie



gewogene Quadratsumme der Verbesserungen abzüglich des Potentials von Konstanten bzw. hier die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen aus dem allgemeinen Ausgleichungskonzept $\Phi \Rightarrow$ Minimum.

innere Formänderungsenergie minus dem Potential der äußeren Lasten bzw. hier das Weggrößenverfahren der Elastostatik $\Pi \Rightarrow$ Minimum.

Kontrollgleichung $\left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^t \underline{t} - \underline{p} = \underline{0}$

Gleichgewichtsgleichung $\underline{p} = \mathbf{A}^t \underline{s}$

Korrelatengleichung $\mathbf{P} \underline{v} - \underline{t} = \underline{0}$

Werkstoffgleichung $\underline{s} = \mathbf{K} \underline{v}$

Fehlergleichung $-(\underline{l} + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}$

geometrische Verträglichkeit $\underline{v} = \mathbf{A} \underline{r} - \underline{v}_u$

Beobachtungen \underline{l}

unverformte Elementgeometrie \underline{l}

Verbesserungen \underline{v}

Elementverformungen \underline{v}

Korrelaten \underline{t}

Stabendkräfte \underline{s}

Punktverschiebungen $\underline{x} - \underline{x}_0$

Knotenverschiebungen \underline{r}

ausgegliche Beobachtungen $\underline{l} + \underline{v}$

verformte Elementgeometrie $\underline{l} + \underline{v}$

willkürlich eingeführte Konstanten \underline{p}

äußere Lasten \underline{p}

Gewicht der Beobachtungen \mathbf{P}

Reduzierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}

Jakobimatrix $\left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^t$

Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t

Normalgleichungen

$\underline{\Delta x}_j = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} (\underline{f}(\underline{x}_{j-1}) - \underline{l}) + \underline{p})$

$\underline{r} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \underline{v}_u + \underline{p})$

Ein gravierender Unterschied fällt auf: die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t beim Weggrößenverfahren der linearen Theorie ist konstant, wohingegen die Jakobimatrix (Konfigurationsmatrix) $\left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^t$ bei der Ausgleichungsrechnung iterativ angepaßt werden muß. Das bedeutet, daß bei dem Weggrößenverfahren das Gleichgewicht am unverformten System gebildet wird. Diesen Sachverhalt bezeichnet der Statiker als Theorie erster Ordnung. Die Ausgleichungsrechnung dagegen ermittelt das Gleichgewicht am verformten System. Ein weiterer Unterschied bezieht sich auf die Vorverformungen \underline{v}_u . Im Weggrößenverfahren sind die Vorverformungen als bekannt vorausgesetzt bzw. durch die vorhandene Tragwerksgeometrie eindeutig bestimmt. Da sich die Tragwerksgeometrie unter Lastfällen aber verändert, ist diese Annahme sicher nur dann erlaubt, wenn diese Änderungen klein bleiben. Die Ausgleichungsrechnung formuliert an dieser Stelle exakt.

Wenn man die Transformation durchführt, wenn man das Weggrößenverfahren durch die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Konstanten ersetzt, entfallen die Einschränkungen der linearen Theorie auf einfache Weise. Die Vorteile liegen auf der Hand. Der Ausgleichungsansatz nach vermittelnden Beobachtungen arbeitet streng geometrisch nichtlinear. Durch die Einführung einer unverformten Elementgeometrie wird das Berechnen von vorverformten Systemen sehr einfach; man sollte sich in diesem Zusammenhang vor Augen führen, daß bei geodätischen Berechnungen äußere Lasten fehlen - der konstante Vektor \underline{p} ist der Nullvektor -, woraus sofort folgt, daß dort ausschließlich vorverformte Netze berechnet und analysiert werden. Nun hat die Berechnung von Tragwerken

mit dem allgemeinen Ausgleichungsansatz weitere Vorteile: sämtliche Größen, die zur Beurteilung der Ausgleichungsergebnisse herangezogen werden können, sind auf die Tragwerksberechnung übertragbar.

Im einzelnen ergeben sich weitere Vergleichsgrößen. Die strichlierten freien Plätze sind in den jeweiligen Disziplinen nicht anzutreffen; ihre Bedeutung ist zu untersuchen.

Weitere Vergleichsgrößen - weniger bekannte und solche ohne Entsprechung - im Überblick

vermittelnde Ausgleichung mit Konstanten \underline{p}	Weggrößenverfahren
↓	↓
Kofaktoren der Koordinaten	Verschiebungen unter Einheitslasten
beobachtete (bewegliche) Festpunkte	auf Senk- bzw. Drehfedern gelagerte Punkte
Gesamtredundanz	Grad der statischen Unbestimmtheit
Redundanzanteile der Beobachtungen
.....	Auflagerreaktionen
.....	Schnittgrößen
.....	Einflußlinien

In der vorliegenden Arbeit soll das Augenmerk in den Anwendungen auf die geometrisch nichtlineare Berechnung von Tragwerken mit der Ausgleichungsrechnung, auf die Benutzung von Fehlerellipsen und Redundanzanteilen zur Beurteilung von mechanischen Konstruktionen gerichtet werden.

In umgekehrter Richtung werden die Auflagerreaktionen aus der Mechanik in der geodätischen Netzanalyse zur Beurteilung von Festpunkten untersucht.

4.2.2 Bedingte Ausgleichung und Kraftgrößenverfahren

4.2.2.1 Ohne äußere Lasten

Nachfolgend wird der allgemeine Ausgleichungsansatz auf das Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen und ohne äußere Lasten übertragen (siehe dazu [63]). Dazu stellen wir das Potential zunächst als Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen $\bar{\underline{l}}$ und den Korrelaten \underline{q} auf. Zuvor sollten noch einige Bemerkungen zu den Bedingungsgleichungen gemacht werden. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen kann wie folgt ermittelt werden: man eliminiert solange Beobachtungen bis ein redundanzfreies System, ein sogenanntes Hauptsystem, entsteht [59]; diese Beobachtungen bezeichnen wir zukünftig als eliminierte Beobachtungen. Die Anzahl der eliminierten Beobachtungen entspricht der Anzahl der Bedingungsgleichungen, die nun wie folgt formuliert werden können. Die ausgeglichenen eliminierten Beobachtungen sind Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen der im Hauptsystem verbliebenen Beobachtungen. Wir wollen auch hier von einem System ausgehen, das n Beobachtungen und r Bedingungsgleichungen besitzt. Die eliminierten Beobachtungen stehen im Vektor sämtlicher ausgeglichener Beobachtungen $\bar{\underline{l}}$ bzw. wahren Beobachtungen \underline{l} am Anfang. Es gilt also für die ausgeglichenen eliminierten Beobachtungen $\bar{\underline{l}}_e = \bar{\underline{l}}_i$ für $(i = 1, r)$ und für die im Hauptsystem verbliebenen Beobachtungen $\bar{\underline{l}}_h = \bar{\underline{l}}_i$ für $(i = (r + 1), n)$. Analoges gilt für die wahren Beobachtungen \underline{l} . Folgendes Potential ergibt sich

$$\Phi(\bar{\underline{l}}, \underline{q}) = \frac{1}{2} (\bar{\underline{l}} - \underline{l})^t \mathbf{P} (\bar{\underline{l}} - \underline{l}) - \underline{q}^t (\underline{g}(\bar{\underline{l}} - \underline{c})). \quad (4.38)$$

Die Ableitungen nach den Unbekannten ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{l}} &= P(\bar{l} - l) - \left(\frac{\partial g(\bar{l})}{\partial \bar{l}} \right)^t \underline{q} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}} &= -(\underline{g}(\bar{l}) - \underline{c}) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Folgende Vereinbarung wird getroffen

$$\left(\frac{\partial g(\bar{l})}{\partial \bar{l}} \right)^t := \mathbf{B}_x. \quad (4.40)$$

Hier ist nun die Identität zwischen der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen und dem Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen ohne äußere Lasten zu erkennen. Insbesondere entsprechen sich die Gleichungen (4.39) und die ersten beiden nach (4.12) ohne äußere Lasten \underline{p} . Die Korrelaten der bedingten Ausgleichung heißen im Kraftgrößenverfahren statisch Unbestimmte. Ansonsten kann die Berechnung der Unbekannten \bar{l} und \underline{q} wie in Kapitel 2 erfolgen. Zuverlässigkeiten, etc. werden analog bestimmt. Dabei ist die Korrelate \underline{q} zuerst zu berechnen, anschließend wird die Verbesserung \underline{u} bzw. die ausgeglichene Beobachtung \bar{l} ermittelt (2.60). Der Prozeß ist so lange zu wiederholen bis die Inkremente der Unbekannten verschwinden bzw. die Gleichungen (4.39) eingehalten sind.

Wir wollen an dieser Stelle auf einen kleinen Unterschied zwischen den beiden Verfahren hinweisen, der mit der Art der Bedingungsgleichungen zusammenhängt. Bei der bedingten Ausgleichung ist die oben angegebene Form der Bedingungsgleichungen allgemeiner als beim Kraftgrößenverfahren; dort werden nämlich die eliminierten ausgeglichenen Beobachtungen \bar{l}_e durch die im Hauptsystem verbliebenen \bar{l}_h ausgedrückt, also $\bar{l}_e = \underline{g}(\bar{l}_h) - \underline{c}$. Diese Gleichung lautet ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 - \underline{g}_1(\bar{l}_{r+1}, \bar{l}_{r+2}, \dots, \bar{l}_n) &= c_1 \\ \bar{l}_2 - \underline{g}_2(\bar{l}_{r+1}, \bar{l}_{r+2}, \dots, \bar{l}_n) &= c_2 \\ \dots & \\ \bar{l}_r - \underline{g}_r(\bar{l}_{r+1}, \bar{l}_{r+2}, \dots, \bar{l}_n) &= c_r. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dieser Sachverhalt hat zur Folge, daß die Matrix \mathbf{B}_x , die n Zeilen und r Spalten besitzt, in den ersten r Zeilen eine Einheitsmatrix darstellt. Also

$$\mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_{x(r+1,1)} & b_{x(r+1,2)} & \dots & b_{x(r+1,r)} \\ b_{x(r+2,1)} & b_{x(r+2,2)} & \dots & b_{x(r+2,r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{x(n,1)} & b_{x(n,2)} & \dots & b_{x(n,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B}_{xh} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Wir sehen also, daß das Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen und ohne äußere Lasten ein Spezialfall der bedingten Ausgleichung darstellt.

4.2.2.2 Mit äußeren Lasten

Nun wollen wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden und den Versuch unternehmen, das allgemeine Ausgleichungskonzept auf das Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen und äußeren Lasten zu übertragen. Da in diesem Fall das Potential der äußeren Lasten formuliert werden muß, haben wir die unbekanntenen Knotenkoordinaten \underline{x} und die Näherungsgeometrie \underline{x}_0 zu berücksichtigen. Damit sind die unbekanntenen Koordinaten natürlich noch nicht bestimmbar. Wir müssen sie mit den ausgeglichenen Beobachtungen des Hauptsystemes in Verbindung bringen und somit weitere Bedingungsgleichungen in unser Potential aufnehmen. Das Potential lautet für diesen Fall

$$\Phi(\bar{\underline{L}}_e, \bar{\underline{L}}_h, \underline{q}_e, \underline{q}_h, \underline{x}) = \frac{1}{2} (\bar{\underline{L}}_e - \underline{L}_e)^t \mathbf{P}_e (\bar{\underline{L}}_e - \underline{L}_e) + \frac{1}{2} (\bar{\underline{L}}_h - \underline{L}_h)^t \mathbf{P}_h (\bar{\underline{L}}_h - \underline{L}_h) - \underline{q}_e^t (\bar{\underline{L}}_e - \underline{g}_e(\bar{\underline{L}}_h)) - \underline{q}_h^t (\bar{\underline{L}}_h - \underline{g}_h(\underline{x})) - \underline{p}^t (\underline{x} - \underline{x}_0). \quad (4.43)$$

Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Übertragung auf den allgemeinen Ausgleichungsansatz sollen die oben genannten Vektoren und Matrizen noch einmal ausführlich beschrieben werden.

$\underline{l}_{e(1,r)}^t$	$= [l_1, l_2, \dots, l_r]$	Vektor der eliminierten wahren Beobachtungen
$\bar{\underline{l}}_{e(1,r)}^t$	$= [\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_r]$	Vektor der eliminierten ausgeglichenen Beobachtungen
$\underline{l}_{e(r+1,n)}^t$	$= [l_{r+1}, l_{r+2}, \dots, l_n]$	Vektor der wahren Beobachtungen im Hauptsystem
$\bar{\underline{l}}_{e(r+1,n)}^t$	$= [\bar{l}_{r+1}, \bar{l}_{r+2}, \dots, \bar{l}_n]$	Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen im Hauptsystem
$\underline{q}_{e(1,r)}^t$	$= [q_{e1}, q_{e2}, \dots, q_{er}]$	Vektor der Lagrangemultiplikatoren (statisch Unbestimmte)
$\underline{q}_{h(1,m)}^t$	$= [q_{h1}, q_{h2}, \dots, q_{hm}]$	Vektor der Lagrangemultiplikatoren (Stabendkräfte)
$\underline{x}_{(1,m)}^t$	$= [x_1, x_2, \dots, x_m]$	Vektor der unbekanntenen Koordinaten
$\underline{x}_{0(1,m)}^t$	$= [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]$	Vektor der Ausgangskordinaten
$\underline{p}_{(1,m)}^t$	$= [p_1, p_2, \dots, p_m]$	Vektor der äußeren Lasten

Die Ableitungen nach den Unbekannten ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\underline{L}}_e} &= \mathbf{P}_e (\bar{\underline{L}}_e - \underline{L}_e) - \underline{q}_e &= \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\underline{L}}_h} &= \mathbf{P}_h (\bar{\underline{L}}_h - \underline{L}_h) - \left(\frac{\partial \underline{g}_e(\bar{\underline{L}}_h)}{\partial \bar{\underline{L}}_h} \right)^t \underline{q}_e - \underline{q}_h &= \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}_e} &= -(\bar{\underline{L}}_e - \underline{g}_e(\bar{\underline{L}}_h)) &= \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{q}_h} &= -(\bar{\underline{L}}_h - \underline{g}_h(\underline{x})) &= \underline{0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial \underline{g}_h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{q}_h - \underline{p} &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Diese Gleichungen könnten nun auf die übliche Art und Weise gelöst werden. Da das Gleichungssystem aber durch die 5 Gruppen von Unbekannten relativ groß und der Zusammenhang zum allgemeinen Kraftgrößenverfahren noch sehr undeutlich ist, wollen wir das Gleichungssystem nach (4.44) noch weiter vereinfachen. Dazu richten wir unser Augenmerk auf die letzte der 5 Gleichungen und definieren

$$\left(\frac{\partial \underline{g}_h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t := \mathbf{A}_h^t. \quad (4.45)$$

Bei genauer Betrachtung der Matrix \mathbf{A}_h^t stellen wir fest, daß sie quadratisch ist, denn im Hauptsystem verbleiben so viele Beobachtungen wie zur Bestimmung der unbekannt Koordinaten notwendig sind, woraus sofort folgt, daß die Anzahl der unbekannt Koordinaten mit der Anzahl der Beobachtungen identisch ist. Wenn nun aber die Anzahl der Beobachtungen der Anzahl der Unbekannt entspricht, so liegt bei geodätischer Betrachtung kein Ausgleichungsproblem mehr vor, denn alle Verbesserungen verschwinden identisch Null, die Unbekannt sind direkt aus den geometrischen Verträglichkeitsgleichungen zu bestimmen; die Matrix \mathbf{A}_h^t besitzt also eine Inverse. Somit kann aus der fünften Gleichung von (4.44) sehr einfach der Vektor der Lagrangeschen Multiplikatoren \underline{q}_h berechnet werden, es gilt

$$\underline{q}_h = (\mathbf{A}_h^t)^{-1} \underline{p}. \quad (4.46)$$

Wir setzen nun die Gleichung (4.46) in die zweite Gleichung von (4.44) ein und erhalten unter Berücksichtigung von (4.42)

$$\mathbf{P}_h(\bar{\underline{l}}_h - \underline{l}_h) - \mathbf{B}_{xh} \underline{q}_e - (\mathbf{A}_h^t)^{-1} \underline{p} = \underline{0}. \quad (4.47)$$

Jetzt muß nur noch die Matrix \mathbf{B}_0 eingeführt werden und die Analogie zum Kraftgrößenverfahren wird deutlich. Die Matrix wird definiert als

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ (\mathbf{A}_h^t)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Die ersten beiden Gleichungen nach (4.44) können nun zu einer Vektorgleichung zusammengefaßt werden. Man erhält

$$\mathbf{P}(\bar{\underline{l}} - \underline{l}) - \mathbf{B}_x \underline{q}_e - \mathbf{B}_0 \underline{p} = \underline{0}. \quad (4.49)$$

Nun wollen wir noch die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t definieren, die uns bereits aus dem Weggrößenverfahren bekannt ist. Ein Teil dieser Matrix, der sich auf die im Hauptsystem verbleibenden Beobachtungen bezieht, ist uns bereits begegnet, der unbekannt - leicht zu bestimmende - Teil dieser Matrix bezieht sich auf die eliminierten Beobachtungen. Man kann demnach für die Gleichgewichtsmatrix wie folgt schreiben

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^t & \mathbf{A}_h^t \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Die Matrix \mathbf{A}_t^t wird aus formalen Gründen eingeführt. Die Werte ihrer Elemente können sehr leicht ermittelt werden, wie man vom Weggrößenverfahren weiß. Damit ergibt sich der für die weiteren Berechnungen wichtige Ausdruck

$$\mathbf{A}^t \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^t & \mathbf{A}_h^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ (\mathbf{A}_h^t)^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{E}. \quad (4.51)$$

Wenn man die Gleichung (4.49) von links mit \mathbf{A}^t multipliziert und die Identität $\mathbf{A}^t \mathbf{P}(\bar{\underline{l}} - \underline{l}) = \underline{p}$ benützt, ergibt sich daraus unmittelbar

$$\mathbf{A}^t \mathbf{B}_x = \mathbf{O}. \quad (4.52)$$

Nun aber zur Bestimmung der unbekanntenen Korrelaten \underline{q}_e , den sogenannten Normalgleichungen. Die Multiplikation der Gleichung (4.44) mit $\mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1}$ von links ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}(\bar{\underline{l}} - \underline{l}) - \mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{q}_e - \mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_x^t (\bar{\underline{l}} - \underline{l}) - \mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{q}_e - \mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} &= \underline{0} \\ \mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_x \underline{q}_e &= -\mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} + \mathbf{B}_x^t (\bar{\underline{l}} - \underline{l}). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Nach der Bestimmung der Korrelaten bzw. der statisch Unbestimmten \underline{q}_e ist es mit der Gleichung (4.44) sehr leicht, die ausgeglichenen Beobachtungen zu ermitteln. In der ersten Iteration nimmt man die wahren Beobachtungen als Näherungen für die ausgeglichenen; in allen weiteren Iterationen dann die in der vorigen Iteration berechneten. Mit diesen ausgeglichenen Beobachtungen kann man durch Linearisierung der vierten Gleichung aus (4.44) die Inkremente der unbekanntenen Koordinaten bestimmen. Man erhält also für die unbekanntenen Koordinaten \underline{x}_{i+1} in der i ten Iteration mit den bereits berechneten ausgeglichenen Beobachtungen $\bar{\underline{l}}_{h(i+1)}$

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \underline{\Delta x}_i = \underline{x}_i + \mathbf{A}_h^{-1} (\bar{\underline{l}}_{h(i+1)} - \underline{g}_h(\underline{x}_i)). \tag{4.54}$$

Damit ist es mit der veränderten Geometrie \underline{x} möglich, die Matrizen \mathbf{A}_h , \mathbf{B}_x und \mathbf{B}_0 erneut zu bestimmen. Die Berechnungen sind solange zu wiederholen, bis sich die Unbekannten praktisch nicht mehr ändern oder die Ausgangsgleichungen erfüllt sind.

Eine für den Geodäten interessante Besonderheit dieses Ansatzes sei erwähnt. Die Bedingungsgleichungen $\underline{g}_e(\bar{\underline{l}}_h)$ müssen nicht explizit bekannt sein, damit mit diesem Verfahren gerechnet werden kann. Die Matrizen \mathbf{B}_x und \mathbf{B}_0 kann man sich ebenso mit Hilfe der Gleichungen (4.51) und (4.52) beschaffen.

Die Analogien zwischen der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen und dem Kraftgrößenverfahren der Mechanik im Überblick

Methode der kleinsten Quadrate

Prinzip der minimalen Gesamtenergie

↓

↓

gewogene Quadratsumme der Verbesserungen abzüglich des Potentials von Konstanten bzw. hier die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen aus dem allgemeinen Ausgleichungskonzept $\Phi \Rightarrow$ Minimum.

innere Formänderungsenergie minus des Potentials der äußeren Lasten bzw. hier das Kraftgrößenverfahren der Elastostatik $\Pi \Rightarrow$ Minimum.

Kontrollgleichung $\left(\frac{\partial g_h(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^t \underline{q}_h - \underline{p} = \underline{0}$

Gleichgewichtsgleichung $\underline{k}_2 - \underline{p} = \underline{0}$

Korrelatengleichung
 $\mathbf{P}(\bar{\underline{l}} - \underline{l}) - \mathbf{B}_x^t \underline{q}_e - \mathbf{B}_0^t \underline{p} = \underline{0}$

Werkstoffgleichung $\underline{s} = \mathbf{K}\underline{v}$ bzw.
 $\mathbf{K}\underline{v} - \mathbf{B}_x^t \underline{k}_1 - \mathbf{B}_0^t \underline{p} = \underline{0}$

Bedingungsgleichungen $\bar{\underline{l}}_e - \underline{g}_e(\bar{\underline{l}}_h) = \underline{0}$
 $\bar{\underline{l}}_h - \underline{g}_h(\underline{x}) = \underline{0}$

geometrische Verträglichkeit $\mathbf{B}_x^t(\underline{v} + \underline{v}_u) = \underline{0}$
 $\mathbf{B}_0^t(\underline{v} + \underline{v}_u) - \underline{r} = \underline{0}$

wahre Beobachtungen \underline{l}

unverformte Elementgeometrie \underline{l}

ausgegliche Beobachtungen $\bar{\underline{l}}$

verformte Elementgeometrie $\underline{l} + \underline{v}$

Verbesserungen $\underline{v} = \bar{\underline{l}} - \underline{l}$

Elementverformungen \underline{v}

Korrelaten \underline{q}_e

Statisch Unbestimmte \underline{k}_1

Punktverschiebungen $\underline{x} - \underline{x}_0$

Knotenverschiebungen \underline{r}

willkürlich eingeführte Konstanten \underline{p}

äußere Lasten \underline{p}

Gewicht der Beobachtungen \mathbf{P}

Reduzierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}

Normalgleichungen

$\underline{q}_e = (\mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_x)^{-1} (-\mathbf{B}_x^t \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} + \mathbf{B}_x^t (\bar{\underline{l}} - \underline{l}))$

$\underline{k}_1 = (\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_x)^{-1} (-\mathbf{B}_x^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_0 \underline{p} - \mathbf{B}_x^t \underline{v}_u)$

Numerische Verfahren zur Netzberechnung

Die aus dem allgemeinen Ausgleichungskonzept sich ergebenden Gleichungssysteme sind - wie man sofort erkennt - mit sehr vielen Nullelementen belegt. Man bezeichnet diese Systeme als *dünnbesiedelt* oder auch *dünnbesetzt*. Mittlerweile hat sich der englische Fachausdruck *sparse* durchgesetzt. Da die dargestellten Gleichungssysteme in der Matrixschreibweise formuliert sind, spricht man in diesem Kontext von dünnbesiedelten Matrizen bzw. Sparsematrizen. Sparsematrizen sind somit Matrizen mit besonderer Besetzungsstruktur in bezug auf den Wert der Einzelelemente der Matrix, also solche Matrizen, bei welchen eine überwiegende Anzahl von Elementen den Wert Null aufweist. Manche Autoren definieren eine Matrix als Sparsematrix, wenn mindestens neunzig Prozent der Elemente identisch Null sind. Wo nun treten derartige Matrizen auf und was veranlaßt uns dieser Tatsache ein ganzes Kapitel zu widmen? Die Antwort auf die erste Frage ist recht einfach: überall dort, wo große Netze bzw. netzartige Strukturen, also auch Finite-Elemente-Netze, berechnet werden müssen. Bei der Beantwortung nach dem Nutzen der Sparsealgorithmen muß weiter ausgeholt werden. In der Einleitung wurde bereits darauf hingewiesen, daß Netzen in allen Ingenieurgebieten eine besondere Bedeutung zukommt. Damit werden die Sparsematrizen ganz zwangsläufig Gegenstand von Untersuchungen, denn effektives Arbeiten mit ihnen kommt vielen Anwendungen zugute. Das Matrizenkalkül erhielt in erster Linie durch die rasante Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung die heutige Stellung, denn es ist recht einfach in Programmiersprache umzusetzen. Nur in diesem Zusammenhang sind Sparsealgorithmen zu verstehen und die Hauptziele der Sparseberechnung können formuliert werden: erstens die Minimierung der Speicherplatzanforderungen und zweitens die Reduzierung der Rechenzeiten. Dazu benötigt man spezielle Speicher- und Programmierstechniken, welche die schwache Besetztheit (sparseness) dieser Matrizen berücksichtigen. Mit diesen Algorithmen sind heute Probleme auf dem PC zu bewältigen, die früher auf dem Großrechner Schwierigkeiten bereiteten. Nach unseren Erfahrungen scheint gerade die Beherrschung dieser Verfahren für die Lösung aller Ingenieuraufgaben von entscheidender Bedeutung zu sein, denn wiederholte Berechnungen mit unterschiedlichen Randbedingungen verbessern die Qualität des Ergebnisses. Dies ist aber nur möglich, wenn die Anforderungen an Speicherplatz oder noch stärker an Rechenzeit im Rahmen gehalten werden können. Letzten Endes werden durch den Einsatz dieser Methoden die anfallenden Kosten minimiert. Man erkennt sofort, daß effektiv arbeitende numerische Verfahren zur Netzberechnung nur Sparsealgorithmen sein müssen. Aus diesen Gründen - als Beantwortung des zweiten Teils der Frage - werden im folgenden Kapitel Sparsealgorithmen behandelt; ein kurzer Überblick zur Entwicklung von Sparsetechniken schließt sich an.

Die Sparsealgorithmen sind vor ungefähr 30 Jahren entstanden. Damals hat der Einsatz von Rechenautomaten in vielen Gebieten der Wissenschaft Veränderungen hervorgerufen; mit der Beherrschung großer Gleichungssysteme versprach man sich die Lösung bis dahin unbewältigter Aufgaben. So entstanden Sparsetechniken, deren Grundlagen u.a. Cuthill und Mc Kee, Reid, Tewarson und Bunch [16], [82], [101] und [12] schufen. Nicht vergessen sollte man in diesem Zusammenhang Evans [19] und (in Deutschland) Schendel [90]. Mitarbeiter am Institut des Verfassers beschäftigten sich schon früh mit dieser Thematik. Gründig befaßt sich bereits 1975 [34] damit; Schek veröffentlichte 1976 [87] und mit Steidler und Schauer zusammen [89]; Stark schreibt in seiner Dissertation zur Lösung großer geodätischer Normalgleichungen [96]. Der Begriff der Hypersparsetechnik wird eingeführt [98], [39]. Der Grund für diese rege Beschäftigung mit Sparsetechniken liegt auf der Hand: in der Geodäsie kommen sehr häufig große Gleichungssysteme vor z.B. photogrammetrische Blöcke, geodätische Strecken- und Richtungsnetze, etc.. Aber nicht nur geodätische Netzberechnungen, sondern auch die Finiten Element Methoden profitieren von der Sparsetechnik, werden durch sie effizienter. Schwarz untersucht dies [91], [92], Lawo und Thierauf ebenso [52]. Die Notation der nachfolgenden Ausführungen orientiert sich an einem Standardwerk des Matrizenkalküls [108].

5.1 Konventionelle Sparsetechnik

5.1.1 Netztopologie und Besetzungsstruktur der Systemmatrix

Im folgenden soll das Problem etwas genauer beleuchtet werden, indem die symmetrische Matrix \mathbf{N} , welche durch Multiplikation mit dem Unbekanntenvektor \underline{x} die sogenannte rechte Seite \underline{b} ergibt, definiert wird. Diese Matrix wird im allgemeinen als Systemmatrix bezeichnet. Es gilt also

$$\mathbf{N}\underline{x} = \underline{b}. \quad (5.1)$$

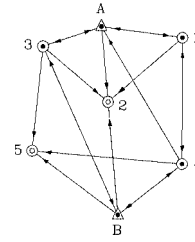
Dabei ist die Matrix \mathbf{N} je nach Problemstellung unterschiedlich besetzt. Wir erhalten z.B.: Band-, Block- und Streifenmatrizen mit Ränderungen in vielfältiger Art und Weise; im Gegensatz dazu solche, welche so unregelmäßig besetzt sind, daß überhaupt keine Struktur zu erkennen ist. Die letzteren werden als beliebige Sparsematrizen bezeichnet. Wie nun entstehen die Strukturen dieser Matrizen? Die Antwort darauf ist nicht so einfach, wie man auf den ersten Blick glauben mag: auf alle Fälle hängt die Struktur von den Unbekannten ab, die zur Lösung des Problems bestimmt werden müssen. Das sieht man sofort ein, wenn man sich vor Augen führt, daß die Dimension der zu invertierenden (faktorisierenden) Matrix der Anzahl der Unbekannten entspricht. Für ein- und dasselbe Netz kann es demnach unterschiedliche Besetzungsstrukturen geben je nach gewähltem Ansatz. Beispiele hierfür seien das geodätische Höhennetz, welches sowohl bedingt als auch vermittelnd ausgeglichen werden oder aber das mechanische Fachwerk, das einerseits mit dem Kraft- und andererseits mit dem Weggrößenverfahren berechnet werden kann. Wenn wir einschränkend festsetzen, daß die Unbekannten der Gleichungsmatrix Knotenvariablen des Netzes seien, folgt daraus sofort, daß die Besetzungsstruktur der symmetrischen Sparsematrix fast direkt am Netz abgelesen werden kann.

Am folgenden Beispiel (5.1) wird deutlich, wie die Besetzung der Matrix gewissermaßen eine Folge des Beobachtungsprogrammes ist. Eben dieses Beobachtungsprogramm verknüpft die Unbekannten miteinander, die hier mit den Netzknoten zusammenfallen (Lagekoordinaten und Orientierungsunbekannte). In diesem Fall sind auch die beiden Festpunkte in die Systemmatrix aufgenommen, da dort ebenfalls unbekannt orientierungen bestimmt werden müssen. Die Entstehung der Besetzungsstruktur ist an der kompakten Submatrizenstruktur besonders einfach ablesbar. Zur besseren Übersicht wurde die Besetzungsstruktur auf Submatrizenebene angegeben, in dem alle Unbekannte pro Punkt, also die Lagekoordinaten und die Orientierungsunbekannten in einer Submatrix zusammengefaßt wurden. Der Knoten 2 beispielsweise ist mit dem Knoten A durch eine Richtungsbeobachtung von A nach 2 verknüpft; demnach stehen die beiden Punkte in Beziehung zueinander, die Nebendiagonalsubmatrix $A - 2$ oder $2 - A$ der Systemmatrix bzw. Normalgleichungsmatrix ist vorhanden. (Nichtnullelemente in der Submatrix sind natürlich nur die Elemente, welche in der Richtungsbeobachtung von A nach 2 angesprochen sind; also die unbekannt orientierung in A und die unbekannt Lagekoordinaten in 2.) Die Nebendiagonalsubmatrix $2 - 4$ dagegen existiert nicht, denn zwischen diesen Netzknoten gibt es keine Verbindung. Die Struktur der Normalgleichungsmatrix auf der Ebene der Submatrizen zeigt noch einmal sehr deutlich: die Topologie des Netzes spiegelt sich in der Besetzungsstruktur der Systemmatrix bzw. die Inzidenzabbildung der Knoten auf die Kanten und die Besetzung der Normalgleichungsmatrix auf Submatrizenebene sind äquivalent. Die unbekannt Knoten(variablen) wiederum sind auf eine ganz bestimmte Art numeriert, die entscheidenden Einfluß auf die Besetzungsstruktur ausübt. Im Zusammenhang mit der Einsparung von Elementen in der Sparsetechnik wird sich zeigen, daß die Numerierung am günstigsten ist, welche auf die kleinste Anzahl von Elementen führt. Dies gilt natürlich nur im Hinblick auf die direkten Verfahren.

Man erkennt an der nachfolgenden Abbildung sofort, daß überhaupt nicht alle Unbekannt, die in der Systemmatrix vorkommen, bestimmt werden können. So sind auf den Lagefestpunkten A und B lediglich die Orientierungen ω unbekannt. Auf den Punkten 2 und 5 dagegen können die Unbekannt nicht ermittelt werden, weil dort keine Richtungen gemessen wurden. Offensichtlich soll die Anzahl der Unbekannt pro Punkt (3) konstant sein und so werden hier alle Punkte berücksichtigt, wenn wenigstens eine Unbekannt vorhanden ist.

Ein Beispiel aus dem Bereich der Ausgleichsrechnung soll diesen Sachverhalt verdeutlichen.

	1	2	3	4	5	A	B
x	x	x		x		x	
y	x	x		x		x	
w	x	x		x		x	
x		x	x				
y		x	x				
w		x	x				
x			x	x			
y			x	x			
w			x	x			
x				x	x		
y				x	x		
w				x	x		
x						x	
y						x	
w						x	



- △ Festpunkt
- ⊙ Neupunkt
- ▲ ● Standpunkt
- Richtungsbeobachtung vom Standpunkt zum Zielpunkt

Struktur der Normalgleichungsmatrix des Netzes mit den Lage- und Orientierungsunbekannten

- x Nichtnullelement
- o Nullelement

Geodätisches Richtungsnetz

	1	2	3	4	5	A	B
1	x	x		x		x	
2		x	x		x	x	x
3			x		x	x	x
4				x	x		x
5					x		x
A	symmetrisch					x	
B							x

Kompakte Submatrizenstruktur der Normalgleichungsmatrix

Abbildung 5.1: Netztopologie und Besetzungsstruktur der Normalgleichungsmatrix eines geodätischen Richtungsnetzes

Die Normalgleichungsmatrix ist in diesem Beispiel streng genommen singulär, weil die nicht bestimm- baren Unbekannten, also z.B. die Lagekoordinaten von Punkt A, aus den angegebenen Gründen in das System aufgenommen sind. Man behilft sich in diesem Fall wie folgt: die Zeilen und Spalten dieser Unbekannten werden mit Nullelementen versehen; das Hauptdiagonalelement wird auf 1 gesetzt und die rechte Seite an der Stelle eben dieser Unbekannten auf Null.

An diesem Beispiel wird eine weitere Tatsache deutlich. Bei konstanter Anzahl der Unbekannten pro Punkt ist eine gewisse Starrheit gegeben. Wenn wir uns z.B. vorstellen, daß auf einem Punkt etwa zwei Richtungssätze gemessen sind, so müßte die Anzahl der Unbekannten pro Punkt auf vier heraufgesetzt werden. Dies hätte zur Folge, daß die Anzahl der Nullelemente in der Normalgleichungsmatrix ansteigen würde, was dem eigentlichen Sinn der Sparsetechnik widerspricht.

5.1.2 Lösungsstrategien

Die Unbekannten eines linearen bzw. linearisierten Gleichungssystemes können auf unterschiedliche Art und Weise bestimmt werden. Insbesondere unterscheidet man zwischen iterativen und direkten Algorithmen zur Lösung dieser Gleichungen [93], [94], [108].

5.1.2.1 Iterative Methoden

Unter einer iterativen Methode verstehen wir ein Verfahren, welches auf der Basis der Näherungslösung \underline{x}_i eine verbesserte Lösung \underline{x}_{i+1} liefert. Die Folge der Lösungen konvergiert gegen die exakte Lösung \underline{x} . Die iterativen Methoden verändern die Struktur der Matrix \mathbf{N} des zu lösenden Gleichungssystemes im allgemeinen nicht und so kann die schwache Besetztheit der Matrix voll ausgenutzt werden. Auf eine Besonderheit iterativer Verfahren sei hingewiesen: die Struktur der Matrix, also z.B. Band- oder Hüllenstruktur, spielt bei den iterativen Verfahren überhaupt keine Rolle, woraus sofort folgt, daß die Numerierung der Unbekannten kaum Einfluß in bezug auf Speicherplatz und Rechenzeit ausüben wird. Die iterativen Methoden erscheinen damit auf den ersten Blick günstiger. Dies gilt nicht für alle Anwendungen, denn die iterativen Verfahren weisen nicht nur Vorteile auf, sondern sind auch mit einer ganzen Reihe von Nachteilen behaftet. So muß bei ihnen der Lösungsprozeß vollständig wiederholt werden, wenn die Unbekannten \underline{x} mit der gleichen Koeffizientenmatrix \mathbf{N} aber mit verschiedenen rechten Seiten \underline{b} - etwa bei der Berechnung verschiedener Lastfälle in der Statik - bestimmt werden sollen. Die Vorteile der iterativen Verfahren in bezug auf Rechenzeiten hängen mit der Güte des Abbruchkriteriums zusammen, welches den iterativen Prozeß beendet. Denn im Falle der theoretischen Wiederholungszahl der Iterationen gibt es keinen Rechenzeitvorteil mehr; im Gegenteil; die iterativen Verfahren sind dann erheblich langsamer. Weiterhin ist die Bestimmung der Inversen von \mathbf{N} nur mit erheblichem Aufwand möglich und gerade diese Daten haben bei der Netzberechnung große Bedeutung, denn die Begriffe Güte und Zuverlässigkeit sind mit ihnen verbunden. Dennoch sollen an dieser Stelle iterative Methoden benannt werden. Im einzelnen gibt es etwa die Methode der konjugierten Gradienten, die Jakobi-Methode, das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel oder das allgemeinere Verfahren der Überrelaxation.

5.1.2.2 Direkte Methoden

Wir wollen bei der Vorstellung der direkten Methoden von einer symmetrischen und positiv definiten Matrix \mathbf{N} ausgehen. Diese Verfahren erfordern die Speicherung der gesamten Systemmatrix \mathbf{N} und des Konstantenvektors \underline{b} zur Berechnung der Unbekannten \underline{x} . So setzt die Größe des Kernspeichers eine Schranke für die Ordnung der zu lösenden Gleichungssysteme. Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, daß bei der Verwendung von Hilfsspeichern auf ihre spezifischen Eigenschaften, also etwa Zeitaufwand für Transferoperationen, geachtet werden muß. Diese Verfahren bezeichnet man als Frontlösmethoden. Weitere Verfahren, die wesentlich gebräuchlicher sind, sollen hier untersucht werden. Dabei sind an erster Stelle das klassische Eliminationsverfahren nach Gauß und die sogenannte Cholesky-Zerlegung zu nennen. Eine Pivotsuche ist nicht erforderlich, da wir von einer positiv definiten Systemmatrix ausgehen. Obwohl der Gaußsche Algorithmus zu den elementaren numerischen Verfahren gehört und damit als allgemein bekannt angenommen werden darf, soll das algorithmische Vorgehen dieser Methode auch im Hinblick auf die Sparsetechniken kurz beschrieben werden. Dabei soll der Eliminationsprozeß wie folgt interpretiert werden. Die Matrix \mathbf{N} wird im Gaußschen Eliminationsprozeß in die untere Dreiecksmatrix \mathbf{L} (lower) und die obere Dreiecksmatrix \mathbf{U} (upper) zerlegt.

Es gilt also

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{U}. \quad (5.2)$$

Diese Zerlegung der Matrix \mathbf{N} in untere und obere Dreiecksmatrix \mathbf{L} und \mathbf{U} wird als Faktorisierung bezeichnet. Aufgrund der Definition der Elemente der unteren Dreiecksmatrix \mathbf{U} läßt sich die obere Dreiecksmatrix \mathbf{U} als das Produkt einer Diagonalmatrix \mathbf{D} , deren Hauptdiagonalelemente den Pivotelementen entsprechen, und der Matrix \mathbf{L}^t darstellen, also

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^t. \quad (5.3)$$

Aus den Gleichungen (5.2) und (5.3) folgt sofort

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t. \quad (5.4)$$

Das zu lösende Gleichungssystem (5.1) sieht nun folgendermaßen aus

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

Nach der Einführung der Vektors \mathbf{y} auf zwei verschiedene Arten, genauer $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{L}^t\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{z}$ erhält man die zu (5.5) äquivalenten Relationen

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{y} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^t\mathbf{x} + \mathbf{z} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die beiden ersten Gleichungen der genannten Beziehungen werden als Vorwärtseinsetzen bzw. -substitution, die letzte Gleichung als Rückwärtseinsetzen bzw. -substitution bezeichnet. Das Gaußsche Eliminationsverfahren besteht demnach aus drei getrennten Teilprozessen: Faktorisierung, Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Die Faktorisierung wird im allgemeinen unabhängig von Vor- und Rücksubstitution durchgeführt, was den Vorteil hat, nacheinander mehrere Gleichungssysteme mit der Matrix \mathbf{N} und verschiedenen rechten Seiten \mathbf{b} zu lösen. Die Cholesky-Zerlegung funktioniert ganz ähnlich mit $\mathbf{L}_{\text{Chol}} = \mathbf{L}_{\text{Gauß}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ und $\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$. Dies ist aber im Hinblick auf die Sparsetechnik von untergeordneter Bedeutung. Die Faktorisierung der Systemmatrix erfolgt durch Zeilenoperationen dergestalt, daß etwa im ersten Eliminationsschritt die erste Unbekannte aus allen folgenden Zeilen eliminiert wird, indem jeweils ein wohldefiniertes Vielfaches der ersten Zeile von allen folgenden abgezogen wird. Dies führt dazu, daß an bestimmten Stellen der Systemmatrix \mathbf{N} Elemente entstehen können, die vor diesem Eliminationsschritt nicht vorhanden waren. Diese Elemente werden als Füllelemente bezeichnet; der übliche englische Fachausdruck lautet: *fill-ins*. Das soll an dem kleinen Richtungsnetz nach Abbildung 5.1 dargelegt werden und dort insbesondere nach der Submatrizenstruktur.

	1	2	3	4	5	A	B	
	x	x		x		x		1
		x	x	\emptyset	x	x	x	2
			x	\emptyset	x	x	x	3
				x	x	\emptyset	x	4
					x	\emptyset	x	5
	symmetrisch					x	\emptyset	A
							x	B

x Nichtnullsubmatrix
 \emptyset fill-in-Submatrix

Abbildung 5.2: Kompakte Submatrizenstruktur mit fill-ins am Beispiel des Richtungsnetzes

Wie dort erklärt wurde, ist die Submatrix 2–4 eine Nullmatrix. Bei der Gauß- oder Cholesky-Zerlegung entsteht aber genau an dieser Stelle eine neue Nichtnullmatrix, denn im ersten Eliminationsschritt

wird von der zweiten Submatrizenzeile die erste so subtrahiert, daß an der Stelle $2 - 1$ eine Nullmatrix entsteht. Dabei entsteht an der Stelle $2 - 4$ die neue Nichtnullsubmatrix bzw. die fill-in-Submatrix. Führt man sämtliche Eliminationsschritte durch, erhält man die Struktur nach Abbildung 5.1. Die Entstehung der fill-ins durch die Gauß- und Cholesky-Faktorisierung führt dazu, daß die aus dem Beobachtungsprogramm ermittelte Struktur der Systemmatrix eben um die Plätze dieser fill-ins erweitert werden muß. An dieser Stelle sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei der Gaußelimination nur das obere Dreieck \mathbf{U} und die Diagonalmatrix \mathbf{D} an die Stelle der Matrix \mathbf{N} , erweitert um die Füllelemente, gespeichert wird. Oben wurde dargelegt, daß ein Vorteil der direkten Methoden darin besteht, daß die Inverse bzw. ganz bestimmte Elemente der Inversen schnell und speicherfreundlich berechnet werden können. Nun wissen wir, daß die Inverse einer dünn besiedelten Matrix keinesfalls auch sparse ist, sondern im allgemeinen vollbesetzt sein wird. Das bedeutet für die Sparseberechnung, daß die gesamte Inverse nicht bestimmt werden darf, denn sonst wäre ein Ziel der Sparsetechnik, die Speicherplatzminimierung, von vorneherein nicht zu realisieren. Aus diesem Dilemma kann man sich befreien, denn die Bestimmung der gesamten Inversen ist für die üblichen Anwendungen nicht erforderlich, denn wir benötigen allenfalls Einzelelemente der Inversen oder aber Produkte der Inversen mit Sparsematrizen, so daß die Elemente der Inversen, welche bei der Multiplikation auf Nullelemente der Sparsematrix treffen, nicht bekannt sein müssen. Die Erfahrung zeigt, daß auch für sehr allgemeine Netzberechnungen diejenigen inversen Elemente der Systemmatrix ausreichen, die bei der Faktorisierung im oberen Dreieck besetzt sind. Die Bestimmung einzelner inverser Elemente der Systemmatrix \mathbf{N} geschieht wie folgt (siehe dazu [18]). Zunächst wollen wir annehmen, daß die Inverse der unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} bekannt sei; also

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{E} . \quad (5.7)$$

Die Matrix \mathbf{E} ist die Einheitsmatrix. Die Inverse der Systemmatrix sei mit \mathbf{X} bezeichnet. Damit erhalten wir mit (5.2) und nach der Einführung der Inversen \mathbf{Y} der unteren Dreiecksmatrix sofort

$$\mathbf{U}\mathbf{X} = \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{Y} . \quad (5.8)$$

Diese augenscheinlich für die Berechnung der inversen Elemente ungeeignete Beziehung entpuppt sich bei näherer Betrachtung als völlig ausreichend. Dazu muß man wissen, daß die Inverse einer unteren Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen auch eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen ist. Zum besseren Verständnis soll die Beziehung (5.8) noch einmal ausführlich dargestellt werden. Die Anzahl der Unbekannten sei n .

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Wir erkennen nun sofort, wie die unbekanntenen Elemente der inversen Systemmatrix nacheinander, mit dem letzten Element beginnend, aus bekannten berechnet werden; es ergibt sich demnach für x_{nn} , x_{n-1n} , x_{n-1n-1} , \dots , x_{11} in eben dieser Reihenfolge

$$\begin{aligned} u_{nn} x_{nn} &= 1 \\ u_{n-1n-1} x_{n-1n} + u_{n-1n} x_{nn} &= 0 \\ u_{n-1n-1} x_{n-1n-1} + u_{n-1n} x_{n-1n} &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ u_{11} x_{11} + u_{12} x_{21} + \dots + u_{1n-1} x_{n-11} + u_{1n} x_{n1} &= 1 . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mit diesem Konzept können nun alle unbekanntenen Parameter der Netzberechnung bestimmt werden. Aufgrund der Vorteile der direkten Verfahren, soll im folgenden die Sparsetechnik im Hinblick auf diese direkten Verfahren und speziell auf die Gaußelimination untersucht werden. Das heißt natürlich nicht, daß die Sparsetechnik nicht auch bei iterativen Verfahren mit Gewinn eingesetzt werden kann.

5.1.3 Speichertechniken

Für ein effektives Arbeiten mit Sparsematrizen spielen solche Speichertechniken eine Rolle, die das Ziel haben, die Information möglichst dicht und durch schnellen Zugriff abrufbar zu speichern. Insbesondere sollten die Speichertechniken folgende Eigenschaften besitzen.

1. Es sollen nur Nichtnullelemente abgespeichert werden.
2. Neu entstehende Nichtnullelemente müssen leicht und schnell in die Liste der Nichtnullelemente eingefügt werden.
3. Ein schneller Zugriff auf die Nichtnullelemente muß gewährleistet sein.

Grundsätzlich unterscheidet man zwei Arten der Speicherung, deren Anwendung von der jeweiligen Lösungsstrategie mitbestimmt wird, und zwar: die Speicherung der Matrizen in nicht verketteten bzw. verketteten Listen.

5.1.3.1 Nicht verkettete Listen

Eine beliebig schwach besetzte symmetrische Matrix \mathbf{A} kann raumsparend in drei Vektoren AN, JA und IA dargestellt werden. Dabei enthält AN zeilenweise fortlaufend, nach aufsteigenden Spaltenindizes sortiert, die numerischen Werte der Matrix \mathbf{A} . JA gibt an, in welcher Spalte das entsprechende Element von AN steht und IA ist ein Zeiger, der immer den Beginn einer neuen Zeile angibt und damit die Länge der Zeilen festlegt. Die Zeile i hat demnach $(IA(i+1)-IA(i))$ Zeilen mit den numerischen Werten $AN(IA(i)), \dots, AN(IA(i+1)-1)$, die in den entsprechenden Spalten $JA(IA(i)), \dots, JA(IA(i+1)-1)$ stehen. Am folgenden Beispiel soll dieser Sachverhalt verdeutlicht werden.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{37} \\ & & & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 & a_{57} \\ \text{symmetrisch} & & & & & a_{66} & 0 \\ & & & & & & a_{77} \end{bmatrix}$$

$$AN = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{22}, a_{25}, a_{27}, a_{33}, a_{37}, a_{44}, a_{55}, a_{57}, a_{66}, a_{77}]$$

$$JA = [1, 2, 3, 4, 2, 5, 7, 3, 7, 4, 5, 7, 6, 7]$$

↑

$$IA = [1, 5, 8, 10, 11, 13, 14]$$

Tabelle 5.1: Zeilenweise Speicherung einer schwach besetzten Matrix in nicht verketteten Listen

Selbstverständlich kann die Speicherung der Matrix auch spaltenweise erfolgen, wobei dann der Vektor JA die Zeilenindizes und IA den Beginn der Spalte angibt. Das beschriebene Speicherschema ist auch für nichtsymmetrische Sparsematrizen zu verwenden. Für positiv definite Matrizen könnte auf die Speicherung der Diagonalelemente im Vektor AN verzichtet werden. Anstelle der Abspeicherung in AN hat man allerdings ein neuen Vektor einzuführen, in den die Diagonalelemente nacheinander abzuspeichern sind. Der Vorteil dieser Maßnahme besteht in der Reduzierung der Anzahl der Integerplätze im Feld JA um die Anzahl der Dimension der Matrix. Der generelle Nachteil der beschriebenen Speichertechnik liegt im Einfügen neuer Nichtnullelemente in die gegebene Listenstruktur. Aus diesem

Grund wird eine nichtverkettete Listenstruktur nur bei Lösungskonzepten zur Anwendung kommen, die ohne Einfügen neuer Elemente auskommen. Dabei handelt es sich um Verfahren, welche auf die Faktorisierung verzichten, also z.B. iterative Verfahren. Weiterhin ist durchaus üblich nicht verkettete Listenstrukturen nach der Faktorisierung einzusetzen, nachdem also sämtliche Nichtnullelemente eingefügt sind und die Besetzungsstrukturen sich nicht mehr ändern.

5.1.3.2 Verkettete Listen

Diese Speichertechnik eignet sich vorzüglich zur Abspeicherung neu auftretender Nichtnullelemente, ohne daß neu sortiert werden muß. Weiterhin werden keine Elemente zwischen- oder umgespeichert. Wir verzichten hier auf die fortlaufend zeilenweise Abspeicherung und speichern zusätzlich zum numerischen Wert $AN(k)=a_{ij}$ und zum Spaltenindex $JA(k) = j$ einen Zeiger $JP(k) = p$, der die Adresse des nächsten Nichtnullelementes in der Zeile i enthält. Der Zeiger $JP(k)$ wird auf Null gesetzt, wenn in dieser Position das letzte Nichtnullelement einer Position enthalten ist. Mit Hilfe des Zeigers $IA(i)$, der wiederum das erste Element der i -ten Zeile angibt, kann nun durch Folgen des Zeigers p die Zeile aufsteigend sortiert abgetastet werden. Somit läßt sich die Struktur der Matrix \mathbf{A} wie folgt darstellen

AN numerischer Wert des Nichtnullelements a_{ij}	JA Spaltenindex j	JP Zeiger zum nächsten Nichtnullelement in der Zeile i
$k = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14$		
$AN = [a_{22}, a_{44}, a_{57}, a_{12}, a_{25}, a_{37}, a_{13}, a_{55}, a_{33}, a_{27}, a_{11}, a_{14}, a_{77}, a_{66}]$		
$JA = [2, 4, 7, 2, 5, 7, 3, 5, 3, 7, 1, 4, 7, 6]$		
$JP = [5, 0, 0, 7, 10, 0, 12, 3, 6, 0, 4, 0, 0, 0]$		
 $IA = [11, 1, 9, 2, 8, 14, 13]$		

Tabelle 5.2: Zeilenweise Speicherung einer schwach besetzten Matrix in verketteten Listen

Da in diesem Schema auf die fortlaufende zeilenweise Speicherung verzichtet wird, kann aus dem Vektor IA nicht wie bei den nicht verketteten Listen die Anzahl der Nichtnullelemente pro Zeile entnommen werden, so daß ein neuer Vektor initialisiert werden muß, wenn diese Information häufig benötigt wird. Ein neues Element kann nun sehr einfach eingefügt werden, indem es in eine freie Position am Ende der Listen abgespeichert wird und der Zeiger des vorangegangenen Nichtnullelements entsprechend angeglichen wird. Wenn man beispielsweise das Element a_{26} in unsere Matrix aufnehmen möchte, werden folgende Maßnahmen erforderlich: $AN(15)=a_{26}$, $JA(15)=6$, $JP(15)=15$ und $JP(14)=10$. Gegenüber den nicht verketteten Listen benötigen wir hier die Anzahl der Dimension der Matrix Speicherplätze mehr, weshalb derartige Speicherschemata nur bei veränderlichen Nichtnullstrukturen, also bei der Faktorisierungen etwa, eingesetzt werden.

5.2 Hypersparsetechnik zur Berechnung aller Netzarten

5.2.1 Einführende Beschreibung der Hypersparsetechnik

Um den Begriff Hypersparsetechnik definieren zu können, müssen einige Bemerkungen zur Netzbe-
rechnung vorausgeschickt werden. Der augenscheinliche Nachteil der Sparsetechnik, so wie sie bisher
vorgestellt wurde, liegt darin, daß für ein einzelnes Element in der Normalgleichungsmatrix mehrere

Integerzeiger bereitgestellt werden müssen, damit die Netzberechnung möglich wird. Dieser Aufwand ist recht hoch und damit wird eine Sparseberechnung nur effizient sein, wenn die Anzahl der Nichtnull-elemente sehr klein ist (maximal 10 Prozent). Dieser Nachteil der Sparseberechnungen kann behoben werden, wenn die Integerzeiger, die sogenannten Pointer, nicht auf Einzelelemente verweisen, sondern auf eine ganze Anzahl von einzelnen hintereinander stehenden Elementen, also, einfacher ausgedrückt, auf Submatrizen. Wann aber zerfällt eine Systemmatrix in viele Submatrizen? Die Antwort auf diese Frage ist sehr einfach und lautet wie folgt: immer dann, wenn die Anzahl der Unbekannten pro Netzknoten größer als 1 ist. Dies ist aber bei den meisten Anwendungen der Fall.

Beispiele hierfür seien das dreidimensionale geodätische Streckennetz mit 3 Unbekannten pro Punkt oder das räumliche mechanische Stabtragwerk mit 6 Unbekannten (3 Verschiebungen und 3 Verdrehungen) im Knoten. Es gibt auch Netze, deren Anzahl von unbekanntem Knotenparametern, im folgenden als Wertigkeit bezeichnet, von Knoten zu Knoten variiert. Ein Beispiel aus der Photogrammetrie mag dies verdeutlichen; bei der Bündelblockausgleichung sind im allgemeinen die Lage der Projektionszentren und die Verdrehungen der zugehörigen Bildebene gegenüber dem übergeordneten globalen System unbekannt. Wir haben damit den Netzknoten Projektionszentrum mit der Wertigkeit 6. Der Sinn dieser Ausgleichung besteht in der Bestimmung von unbekanntem Lage- und/oder Höhenkoordinaten, deren Wertigkeit zwischen 1 und 3 liegt. Unterschiedlichen Meßkammern können verschiedene Anzahlen von zu berechnenden Verzeichnungsparametern zugewiesen werden. Die unbekanntem Bildstrahlmaßstäbe besitzen die Wertigkeit 1. Ein weiteres Beispiel sei das geodätische Richtungsnetz nach Abbildung 5.1. Dort gibt es streng genommen die Wertigkeiten 1, 2 und 3. Die Knoten *A* und *B* sind Festpunkte und besitzen die Wertigkeit 1, denn dort sind nur die Orientierungen unbekannt; die Knoten 2 und 5 sind keine Standpunkte, sondern lediglich Zielpunkte von Richtungsbeobachtungen, woraus folgt, daß dort keine Orientierungsunbekanntem vorhanden sind und demzufolge nur die Lagekoordinaten unbekannt sind (Wertigkeit 2). Die restlichen Knoten besitzen die Wertigkeit 3 (Lagekoordinaten und Orientierung).

Mit einem Wort: zu jedem Knoten gehört eine ganz bestimmte Zahl von unbekanntem Knotenvariablen, jeder Knoten besitzt eine spezifische Wertigkeit. Wenn man nun die Besetzungsstruktur der Normalgleichungsmatrix aus der Verbindung der Knoten - unabhängig von der Wertigkeit des Knotens - erzeugt, so erhält man ein System von einzelnen Submatrizen, für die der gleiche Verwaltungsaufwand betrieben werden muß wie für das Einzelelement. Diese Submatrizenstruktur wird also durch die Integerfelder so beschrieben als handelte es sich bei den Submatrizen um Einzelelemente. Diese Art der Beschreibung der Netzstruktur hat einen großen Vorteil in bezug auf die Speicherplätze. Entfällt bei der Sparsetechnik eine gewisse Anzahl von Pointern auf ein Einzelelement, so benötigt die Hypersparsetechnik die gleiche Anzahl von Pointern für eine Submatrix. Damit ist die Definition der Hypersparsetechnik indirekt vollzogen. Die Grundeinheiten der Sparsetechnik sind einzelne Elemente der Systemmatrix, wohingegen die Grundbausteine der Hypersparsetechnik Submatrizen darstellen.

Diese Submatrizen werden mit der gleichen Menge an Integerfeldern beschrieben wie die Einzelelemente der Sparsetechnik; sie sind aus diesem Grund wesentlich effizienter. Diese Effizienz in bezug auf Speicherplätze ist sehr einfach nachzuvollziehen. Wenn man von einem Netz ausgeht, das durchschnittlich 3 unbekanntem Knotenvariablen pro Netzknoten aufweist, so hat die Hypersparsetechnik für 9 Einzelemente der (3×3) -Submatrix denselben Verwaltungsaufwand wie die Sparsetechnik für ein Element. Es gilt die einfache Regel: je größer die Anzahl der Unbekanntem pro Punkt um so effizienter ist die Hypersparsetechnik.

In den vorigen Abschnitten wurde dargelegt, daß die Sparsetechniken ihre Vorteile besonders wirkungsvoll zur Geltung bringen, wenn die Struktur des Netzes eine beliebige, d.h. völlig ungeordnete Matrix zur Folge hat. Für Band- oder Streifenmatrizen mit regelmäßiger Besetzung z.B. gibt es Algorithmen, die der Sparsetechnik überlegen sind. Für eine beliebig schwach besetzte, also unregelmäßige Systemmatrix gibt es keine Verfahren, die schneller und mit weniger Speicherplätzen auskommend die zur allgemeinen Netzberechnung notwendigen Berechnungen durchführen. Viele Algorithmen, die eine besondere Besetzung der Systemmatrix voraussetzen, sind nur bedingt einsetzbar. So kann ein Bandlöser sehr einfach dadurch seine Effizienz verlieren, daß beispielsweise auf Grund bisheriger Be-

rechnungen, neue Verbindungen oder Elemente erzeugt werden müssen, die die Bandstruktur zerstören bzw. die Bandbreite so vergrößern, daß Speicherplatzanforderungen und Rechenzeiten stark anwachsen und damit ineffizient werden. Diese Nachteile entfallen bei der Hypersparseberechnung, denn dort wird von einer beliebig besetzten Systemmatrix ausgegangen. Mit anderen Worten: die Hypersparsetechnik eignet sich zur Berechnung aller Netzformen; sie ist der einzige bisher bekannte universell einsetzbare Algorithmus zur Netzberechnung. Eine Verbesserung der Hypersparsetechnik nützt allen Netzberechnungen.

5.2.2 Berechnung von Netzen mit Hypersparsealgorithmen

Die Hypersparsetechnik kann ganz allgemein in zwei verschiedene Bereiche unterteilt werden (siehe dazu [98]). In einen ersten Bereich, in welchem lediglich die Besetzungsstrukturen auf Submatrizebene, die Berechnung der Besetzung der fill-ins, etc. eine Rolle spielen und einen zweiten, in dem die numerischen Werte der Matrix verarbeitet werden. Die Bezeichnung für diesen ersten Teil lautet: *symbolische* Sparsetechnik, weil eben nur mit den symbolischen Einheiten besetzt/unbesetzt oder 1/0 gearbeitet wird. Der zweite Teil wird im Gegensatz dazu als *numerisch* bezeichnet, weil dort eben nur die tatsächlichen Werte, die eine physikalische, geometrische oder sonstige Bedeutung haben, manipuliert werden.

Die symbolischen Sparsealgorithmen sind völlig unabhängig von der Netzart; sie hängen nur von der Netztopologie oder Netzform ab. Diese Netztopologie erzeugt z.B. die Besetzungsstruktur der Systemmatrix und damit auch die Anzahl der Submatrizen-fill-ins, die bei der Faktorisierung der Systemmatrix entstehen. Diese Anzahl der neu entstehenden fill-ins ist eine Folge der Knotennumerierung. Die symbolische Bearbeitung der Sparsematrizen benützt lediglich ganze Zahlen, sogenannte Integergrößen. Diese Verfahren benötigen als Eingabewerte nur die Kanten-Knotenmatrix und die Wertigkeit der einzelnen Netzknoten.

Der numerische Teil arbeitet dagegen mit den Pointern, die das Resultat der symbolischen Berechnung waren, und den numerischen netzartabhängigen Werten. Hier werden z.B. die Unbekannten numerisch bestimmt oder einzelne Elemente bzw. Submatrizen der inversen Systemmatrix. Auch die numerische Sparsetechnik ist zweigeteilt. Auf der einen Seite haben wir einen netzartspezifischen und auf der anderen Seite einen immer gleichbleibenden Teil, der beispielsweise die Faktorisierung, die Vor- und Rückwärtssubstitution und die Berechnung einzelner Submatrizenelemente betrifft.

Im folgenden werden die Schritte der Netzberechnung mit der Hypersparsetechnik konkret angegeben. Jeder Schritt wird dabei auf seine Allgemeingültigkeit bzw. seine Austauschbarkeit überprüft, d.h. es wird danach geschaut, ob er für alle Netzberechnungen zu gebrauchen oder ob er netzartabhängig ist.

1. Die Symbolische Faktorisierung

Nach dem Einlesen der Knoten und Kanten wird die Symbolische Faktorisierung durchgeführt. Unter Faktorisierung versteht man auch in diesem Zusammenhang die Zerlegung der System- bzw. Normalgleichungsmatrix in die obere und untere Dreiecksmatrix nach Gleichung (5.2). Grundsätzlich ist bei der Faktorisierung symmetrischer Matrizen zu beachten, daß obere und untere Dreiecksmatrix sehr leicht auseinander zu bestimmen sind, wie man an Gleichung (5.3) direkt abliest; dies ist vor allem im Hinblick auf die Speicherung dieser Matrizen von Bedeutung, weil dadurch lediglich eine der beiden Dreiecksmatrizen zu speichern ist. Man speichert üblicherweise die obere (upper) Dreiecksmatrix \mathbf{U} und die Diagonalmatrix \mathbf{D} . Die Faktorisierung ist also im Falle symmetrischer Matrizen lediglich die Bestimmung der oberen Dreiecksmatrix (und der Diagonalmatrix); symbolisch bedeutet, daß nicht die numerischen Werte der Dreiecksmatrizen ermittelt werden, sondern nur deren Besetztheit. Anders ausgedrückt: die Generierung der aufgrund der Faktorisierung sich verändernden Struktur der Normalgleichungsmatrix wird als Symbolische Faktorisierung bezeichnet; mit symbolisch bringt man zum Ausdruck, daß den Netzknoten unabhängig von ihrer tatsächlichen Wertigkeit die Wertigkeit 1 zugeordnet wird. Es wird gewissermaßen nur festgestellt, ob eine Submatrix vorhanden ist oder nicht, es wird nicht festgestellt, wie groß diese Submatrix ist. Dabei werden natürlich die im vorigen Abschnitt erwähnten

fill-ins mitbestimmt. Sehr aufschlußreich ist in diesem Zusammenhang die Abbildung 5.1, die das Ergebnis der Symbolischen Faktorisierung für das angegebene Strecken- und Richtungsnetz zeigt. Die Symbolische Faktorisierung ist allgemein einsetzbar, d.h. netzartunabhängig.

2. Die Optimierung der Knotennumerierung

Bei der symbolischen Faktorisierung sind fill-ins entstanden. Uns ist bekannt, daß die Anzahl der fill-ins von der Knotennumerierung abhängt. Bei der Optimierung der Knotennumerierung sind die Knoten dergestalt neu zu numerieren, daß die Anzahl der fill-ins möglichst klein wird. Dieses Problem wird bei uns heuristisch gelöst. Der Eliminationsprozeß der Faktorisierung läuft über die Hauptdiagonalsubmatrizen von oben nach unten. Aus diesem Grund entstehen sehr viele Füllsubmatrizen immer dann, wenn die Submatrizenzeilen, die oben stehen, stark besetzt sind, da dann die darunterliegenden häufig freien Plätze gefüllt werden. Deshalb zählen wir bei diesem Prozeß die Anzahl der Submatrizen pro Submatrizenzeile und vertauschen Submatrizenzeilen und -spalten so, daß die Submatrizenzeilen mit den wenigsten Submatrizen oben stehen und die mit den meisten unten. Diese Maßnahme gelingt mit Permutations- und Sortieralgorithmen der Sparsetechnik. Diese Optimierung stellt ganz unabhängig von der gegebenen Knotennumerierung eine (fast) optimale Reihenfolge der Unbekannten fest; sie ist netzartunabhängig.

3. Die Berechnung der Zeiger (Pointer)

Nach der Symbolischen Faktorisierung und der Optimierung der Reihenfolge der Unbekannten werden mit der Wertigkeit der Netzknoten sämtliche für die Verwaltung der Hypersparsematrizen benötigten Pointer auf die Wertigkeit der Netzknoten angepaßt. Weiterhin werden die Speicherplätze für die Elemente der Systemmatrix, der Rechten Seite, etc. bereitgestellt. Es kann überprüft werden, ob die Felder ausreichend dimensioniert sind; im Falle dynamischer Feldverwaltung können nach diesem Arbeitsschritt die Speicherplätze bereitgestellt werden. Die Berechnung der Pointer ist netzartunabhängig, da man jedem Netzknoten eine beliebige Zahl von Unbekannten zuordnen kann.

4. Die Numerische Berechnung der Systemmatrix und der Rechten Seite

Die Numerische Berechnung der Systemmatrix und der Rechten Seite ist natürlich netzartspezifisch und damit im eigentlichen Sinn nicht austauschbar. Aber selbst hier kann man unter bestimmten Voraussetzungen soweit vereinheitlichen, daß austauschbare Einzelmodule entstehen können. Die Systemmatrix entsteht durch ein Matrizenprodukt der Form $\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}$. Ist nun die Matrix \mathbf{P} diagonal, so kann der Prozeß des numerischen Aufbaus der Systemmatrix und einer Rechten Seite der Form $\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{v}$ verallgemeinert werden. Wenn die Systemmatrix, z.B. die Steifigkeitsmatrix in der Mechanik, durch ein Produkt der Form $\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}$ entsteht, bei welchem \mathbf{K} nichtdiagonal ist, können nur unter bestimmten Voraussetzungen Sparsealgorithmen mit Gewinn eingesetzt werden; und zwar immer dann, wenn \mathbf{K} bestimmten Bedingungen genügt. Es ist evident, daß \mathbf{K} nicht voll besetzt sein darf, denn dann sind alle Elemente des Steifigkeitsmatrix Nichtnullelemente und die Benutzung von Sparsetechniken wird sinnlos. Die Anwendung von Hypersparsealgorithmen ist nur möglich, wenn die Verknüpfungen der reduzierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} innerhalb bestimmter Grenzen liegen, z.B. innerhalb eines Finiten Elementes, wenn also eine Blockdiagonalmatrix \mathbf{K} auf Elementebene vorliegt. Dies ist bei Netzen fast immer der Fall, wodurch die Anwendung dieser Techniken ihre fast unbegrenzte Allgemeingültigkeit bekommt. In den Fällen nichtdiagonaler Blockmatrizen kann man nun auf zwei Weisen die Sparsetechnik beibehalten; erstens: durch Spektralzerlegung des Produktes $\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}$ auf Elementebene, wodurch man wiederum eine diagonale Gewichtsmatrix erhält und das übliche Verfahren eingesetzt werden kann oder zweitens: indem man Produkte mit vollbesetzten Blockdiagonalmatrizen auf der Elementebene mit entsprechenden Sparsetechniken unterstützt. Die Numerische Berechnung der Systemmatrix ist grundsätzlich netzartspezifisch.

5. Die Numerische Faktorisierung der Systemmatrix

An dieser Stelle soll auf die Hypersparsetechnik etwas näher eingegangen werden. Bei der üblichen Faktorisierung mit Einzelementen nach Gleichung (5.1) werden mit den Kehrwerten von Pivotelementen ganze Zeilen multipliziert und andere Zeilen davon subtrahiert, so daß letztlich

die obere Dreiecksmatrix entsteht. Auf unsere Hypersparsetechnik übertragen lautet die Faktorisierungsvorschrift damit wie folgt: Inversion der Pivotsubmatrix und Multiplikation derselben mit der Submatrizenzeile, anschließende Subtraktion von Submatrizenzeilen. Anders formuliert: aus den Operationen für die Einzelelemente der Sparsetechnik werden Matrizenoperationen bei der Hypersparsetechnik. Die Numerische Faktorisierung ist allgemein einsetzbar und damit netzartunabhängig.

6. *Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution*

Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution wird ebenfalls mit Submatrizenoperationen durchgeführt (siehe (5.6)); sie ist ebenfalls allgemein einsetzbar, weil sie netzartunabhängig ist.

7. *Die Berechnung einzelner Submatrizen der inversen Systemmatrix*

Wie im vorigen Abschnitt bereits dargelegt wurde, ist die Inverse einer dünnbesiedelten Matrix nicht auch sparse, sondern im allgemeinen voll besetzt. Dies ist auch ein Grund dafür, weshalb die Faktorisierung sehr viel schneller zur Lösung führt, als die aufwendige Bestimmung einer vollbesetzten Inversen. Vielfach ist die Kenntnis aller Elemente der Inversen bei der Bestimmung der interessierenden Netzparameter völlig unnötig, wodurch die Berechnung einzelner (ausgewählter) inverser Submatrizen bedeutsam wird. Die Ausgangsdaten für diese Berechnung ist die faktorisierte Systemmatrix, d.h die Berechnung der Inversen ist nur nach der Numerischen Faktorisierung möglich. Auch dieses Modul ist netzartunabhängig und damit für allen Netzberechnungen geeignet.

Wir sehen an den einzelnen Schritten der Hypersparsetechnik sofort, daß hier ein sehr allgemeines, für alle Netzarten zu gebrauchendes, Verfahren vorliegt. Lediglich bestimmte Anteile der Numerischen Berechnung müssen bezüglich unterschiedlicher Netzarten adaptiert werden. Damit steht ein mächtiges Instrument zur Berechnung aller Netzarten zur Verfügung. Die Netze müssen lediglich die Voraussetzung der dünnen Besiedlung der Systemmatrizen mitbringen. Diese Voraussetzung ist aber bei großen Netzen für alle uns bekannten Anwendungen gegeben.

Anwendungen

6.1 Fachwerke

Zunächst wollen wir kurz den Begriff Fachwerk einführen und auf die ausführlichen Beschreibungen [51], [80], [46], [52] hinweisen. Ein Fachwerk besteht aus Stäben und Knoten. Die Knoten sind so ausgebildet, daß lediglich Kräfte übertragen werden können; das Vollgelenk im Knoten verhindert die Weiterleitung der Momente. Weiterhin sollen nur an den Knoten äußere Kräfte angreifen, wodurch eine Beanspruchung von Querkräften bzw. Momenten im Element unmöglich wird. Mit anderen Worten: die Elemente (Stäbe) des Fachwerkes werden ausschließlich auf Druck und Zug beansprucht. Die Querschnitte und das Material der Stäbe sind bekannt, äußere Lasten (verschiedene Lastfälle) ebenso. Die Aufgabe der Fachwerksberechnung besteht nun darin, die Zug- und Druckkräfte infolge dieser äußeren Belastungen zu bestimmen. Weiterhin müssen die Knotenverformungen ermittelt werden. Dies soll nun mit dem allgemeinen Ausgleichungsansatz geschehen. Zuvor wird noch auf eine wichtige Tatsache hingewiesen. Die Tragwerksgeometrie ist streng genommen unbekannt und zu ermitteln; mit Ausnahme der Festpunkte natürlich. Die unverformten Elementlängen dagegen sind bekannt. Folgende Größen sind also gegeben: Festpunkte, ungedehnte Stablängen, Zugsteifigkeiten der Elemente, Näherungsgeometrie des Tragwerkes sowie verschiedene Lastfälle. Gesucht sind die Schnittgrößen, Auflagerreaktionen und Verformungen.

Damit die Übertragung des allgemeinen Ausgleichungsansatzes auf die Fachwerksberechnung gelingt, ist die Formänderungsenergie des Fachwerkstabes in die übliche Form zu bringen; deshalb werden im folgenden die Verbesserungen, die Gewichte und die Beobachtungen für ihn hergeleitet.

6.1.1 Formänderungsenergie des Fachwerkstabes

Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf die Berechnung von Fachwerken setzt voraus, daß die innere Energie eines Fachwerkstabes als gewichtetes Quadrat seiner elastischen Längenänderung formuliert werden kann. Diese Längenänderung wiederum muß als Funktion der Knotenvariablen im globalen System auszudrücken sein. In sämtlichen bisherigen Herleitungen haben wir dies stillschweigend vorausgesetzt, im folgenden werden wir es für das normalkraftbeanspruchte Fachwerkelement zeigen. Dazu beziehen wir uns auf Abbildung 6.1 und definieren:

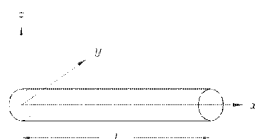


Abbildung 6.1: Zug- bzw. Druckstab

Ein Stab konstanten Querschnittes A mit der Länge l werde nur Kräften in seiner Längsrichtung unterworfen. Bei der Deformation des Stabes bleibe jeder Querschnitt eben und verschiebe sich insgesamt in x -Richtung. In y - und z -Richtung erfolgen somit keine Verschiebungen, so daß im Verschiebungsvektor \underline{f} nach Gleichung (3.26) die zweite und dritte Komponente identisch Null verschwinden. Es bleibt nur die Verschiebungsfunktion $u(x)$ übrig. Unter den Verzerrungskomponenten ist nach Gleichung (3.11)

lediglich

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) \quad (6.1)$$

von Null verschieden. Zur Berechnung der inneren Energie benötigt man nach Gleichung (3.27) das Produkt $\underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon}$. Mit diesen Voraussetzungen ist hier nur die erste Spannungskomponente σ_x , d.h. die Normalspannung im Stab vorhanden. Die Spannungskomponenten σ_y und σ_z verschwinden. Aus dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz (3.17) ergibt sich deshalb

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Eu'(x), \quad (6.2)$$

woraus sich der für die Berechnung der Spannungsenergie wichtige Ausdruck

$$\underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} = \sigma_x \varepsilon_x = Eu'(x)^2 \quad (6.3)$$

ergibt. Mit Gleichung (6.3) und (3.27) ergibt sich die innere Formänderungsenergie eines Stabes zu

$$\Pi_{i,\text{Stab}} = \frac{1}{2} EA \int_0^l u'(x)^2 dx. \quad (6.4)$$

Volumenkräfte, wie z.B. das Eigengewicht, und Oberflächenkräfte sollen hier nicht berücksichtigt werden. Somit erhalten wir nach der Einführung der diskreten Kräfte N_0 und N_l und der entsprechenden Verschiebungen u_0 und u_l an Stabanfang und -ende als Potential der äußeren Lasten

$$\Pi_{a,\text{Stab}} = u_0 N_0 + u_l N_l. \quad (6.5)$$

Damit ergibt sich das Gesamtpotential in gewohnter Weise zu

$$\Pi_{\text{Stab}} = \frac{1}{2} EA \int_0^l u'(x)^2 dx - u_0 N_0 - u_l N_l. \quad (6.6)$$

Wenn man als Näherungsansatz für den Verschiebungszustand die Lösungen der linearen Theorie für ein unbelastetes Stabelement wählt, erhält man

$$u(x) = a_0 + a_1 x, \quad u'(x) = a_1. \quad (6.7)$$

Unter folgenden Randbedingungen

$$u(0) = u_0, \quad u(l_0) = u_l, \quad (6.8)$$

wobei auf die Tatsache, daß es sich bei der Größe l_0 um eine Einbaulänge, d.h. eine Länge im kraftlosen Zustand (auch als ungedehnte Länge bezeichnet) handelt, hingewiesen wird. Es ergibt sich für die Verschiebungsfunktion und die Normaldehnung ε_x in Abhängigkeit der Stabendverformungen

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + \frac{u_l - u_0}{l_0} x \\ \varepsilon_x = u'(x) &= \frac{u_l - u_0}{l_0} = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Zur Ermittlung der Gleichgewichtslage wird das Gesamtpotential in den unbekanntten Verschiebungen ausgedrückt

$$\Pi_{\text{Stab}} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l_0} (u_l - u_0)^2 - N_0 u_0 - N_l u_l, \quad (6.10)$$

damit anschließend nach den Verschiebungen differenziert und das Ergebnis zu Null gesetzt werden kann.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial u_0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & -\frac{EA}{l_0} \\ -\frac{EA}{l_0} & \frac{EA}{l_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_0 \\ N_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Im folgenden wollen wir etwas näher auf die zu Beginn getroffenen Voraussetzungen eingehen. Dort haben wir bestimmt, daß bei der Deformation des Stabes jeder Querschnitt eben bleibe und keine Verschiebungen in y - und z -Richtung vorhanden sein sollen. Dies ist sehr einfach dann möglich, wenn das lokale Koordinatensystem seine räumliche Lage so verändert, daß die Systemlinie des Stabes immer mit der x -Achse des lokalen Koordinatensystemes zusammenfällt. Wird nun die Systemlinie des Stabes bzw. die x -Achse des lokalen Koordinatensystemes als geradlinige Verbindung zwischen Anfangs- und Endpunkt des Stabes betrachtet, so kann die Dehnung ε_x wie folgt

$$\varepsilon_x = \frac{u_l - u_0}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (6.12)$$

geschrieben werden. Dabei ist l die Länge zwischen dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt E des Stabes. Im folgenden wird l als gedehnte Länge bezeichnet. Die innere Energie dieses einen Stabes ergibt sich zu

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \frac{EA}{l_0} (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} p v^2. \quad (6.13)$$

Wir erkennen sofort, daß die innere Energie ein Quadrat der Größe v darstellt, das mit einem Wichtungsfaktor multipliziert wird. Wenn man also eine aus mehreren Stäben zusammengesetzte Struktur (Fachwerk) berechnen möchte, so ist die innere Energie nicht anderes als eine gewichtete (p) Quadratsumme von Verbesserungen (v).

An dieser Stelle ist ein kurzer Hinweis angebracht. Für das gesamte Tragwerk gilt folgendes: ordnet man die zweiten Ableitungen des Potentials nach den Knotenvariablen an, so erhält man eine quadratische Matrix, deren positive Definitheit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Minimums ist. Dies ist der Fall, wenn alle Hauptabschnittsdeterminanten größer Null sind. Dann ist die Gleichgewichtslage stabil. Ist diese Matrix negativ definit, so ist das Gleichgewicht labil, verschwindet eine Determinante identisch Null, ist es indifferent. Diese Matrix wird bekanntlich als Steifigkeitsmatrix bezeichnet, die in unserem Fall, also für ein Stabelement,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_0 \partial u_0} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_0 \partial u_l} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_l \partial u_0} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_l \partial u_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & -\frac{EA}{l_0} \\ -\frac{EA}{l_0} & \frac{EA}{l_0} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

lautet. Die Determinante dieser Steifigkeitsmatrix verschwindet hier natürlich, denn der Stab wurde nicht gelagert; das Gleichgewicht ist streng genommen indifferent. Der Rangabfall dieser Matrix ist 1. (Eine Lagerung reicht zur Regularisierung dieses Problemes aus.)

Nun ist es also gelungen, die innere Energie eines Stabes i als gewichtetes Produkt der elastischen Elementverformungen auszudrücken, also als $v_i v_i p_i$; die genaue Bedeutung der Größe p_i , die ein Element aus der Diagonalmatrix \mathbf{K} darstellt, ist ebenfalls definiert. Damit kann die Berechnung von dreidimensionalen Fachwerken mit dem Formalismus der geodätischen Ausgleichsrechnung behandelt werden.

6.1.2 Fachwerksberechnung mit der Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen besitzt als Wesensmerkmal die sogenannten Fehler- bzw. Verbesserungsgleichungen, die den Zusammenhang zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekannten darstellen; man bezeichnet diese als funktionales Modell. Wir wollen dieses funktionale Modell nun für den Fachwerkstab ermitteln und betrachten aus diesem Grund die Beziehung (6.13). Wir erkennen sofort, daß mit Ausnahme der Größe l alle vorhandenen Variablen gegeben sind. Die Größe l ist die Länge des Fachwerkstabes, ist somit eine Funktion der Koordinaten von Anfangspunkt A und Endpunkt E der Systemlinie. Wenn nun die Punkte einer mechanischen Struktur im dreidimensionalen Raum durch die globalen Koordinaten x , y und z definiert werden, so kann der Abstand der Punkte A und E über

$$l = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 + (z_A - z_E)^2} \quad (6.15)$$

berechnet werden. Der Grund für die obigen Herleitungen wird noch deutlicher, wenn man die Verbesserung

$$v = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 + (z_A - z_E)^2} - l_0 = l - l_0 \quad (6.16)$$

nach Gleichung (6.16) schreibt, denn dann erkennt man sofort, daß die innere Energie des gesamten Fachwerkes der gewichteten Quadratsumme der Verbesserungen eines dreidimensionalen Streckennetzes entspricht, da die Verbesserungsgleichung für den Stab und die Strecke des geodätischen Streckennetzes vollkommen analog sind. Die Verbesserung v ist die Differenz zwischen der aus Koordinaten berechneten Strecke und der beobachteten Strecke, das Gewicht der Beobachtung ist eine Funktion des mittleren Fehlers der Streckenmessung. Fassen wir nun als Verbesserung v die Differenz zwischen gedehnter und ungedehnter Länge des Stabes auf und als Gewicht die Steifigkeit dividiert durch die ungedehnte Länge, so ist die Analogie zwischen geodätischen Streckennetzen und mechanischen Stabtragwerken erklärt. Formänderungsenergie des Fachwerkes und die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen des Streckennetzes sind identisch. Die äußeren Lasten kommen in der Ausgleichsrechnung eigentlich nicht vor; deshalb haben wir in unserer Grundgleichung der allgemeinen Ausgleichsrechnung willkürliche gegebene Konstanten \underline{p} eingeführt, die mit den unbekanntem Knotenvariablen multipliziert werden. Dieses Produkt entspricht dem Potential der äußeren Lasten. Das Problem der Fachwerksberechnung ist damit auf die vermittelnde Ausgleichung mit Konstanten \underline{p} übertragen. Wir erhalten also folgendes Potential für ein Fachwerk mit n Elementen und m Knoten

$$\Pi_F(\underline{x}, \underline{v}, \underline{s}) = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v}}_{\Pi_i} - \underbrace{\underline{s}^t (\underline{l}_0 + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x}))}_{0} - \underbrace{\underline{p}^t (\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat..} \quad (6.17)$$

Unbekannte dieses Potentials sind die Elementverformungen \underline{v} sowohl der n Elemente und die Koordinaten \underline{x} der m freien Knoten. Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Überlegungen werden die oben eingeführten Matrizen und Vektoren und weitere in aller Ausführlichkeit in Augenschein genommen. Zunächst die Vektoren und dann die Matrizen

$\underline{v}_{(1,n)}^t$	$= [v_1, v_2, \dots, v_n]$	Vektor der Elementverformungen
$\underline{s}_{(1,n)}^t$	$= [s_1, s_2, \dots, s_n]$	Vektor der Kräfte
$\underline{l}_{0(1,n)}^t$	$= [l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0n}]$	Vektor der ungedehnten Elementlängen
$\underline{l}_{(1,n)}^t$	$= [l_1, l_2, \dots, l_n]$	Vektor der gedehnten Elementlängen
$\underline{p}_{(1,m)}^t$	$= [p_1, p_2, \dots, p_m]$	Vektor der äußeren Lasten
$\underline{x}_{(1,m)}^t$	$= [x_1, x_2, \dots, x_m]$	Vektor der Gleichgewichtsgeometrie
$\underline{x}_{0(1,m)}^t$	$= [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]$	Vektor der Näherungsgeometrie
$\mathbf{K}_{(n,n)}$		Steifigkeitsmatrix (Diagonalmatrix)

Die Ableitungen des Potentials nach den Unbekannten ergeben die Gleichgewichts-, Werkstoff- und die geometrischen Verträglichkeitsgleichungen.

Also

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_F}{\partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{s} - \underline{p} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi_F}{\partial \underline{v}} &= \mathbf{K} \underline{v} - \underline{s} = \underline{0} \\ \frac{\partial \Pi_F}{\partial \underline{s}} &= -(l_0 + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Nun versuchen wir Analogien zwischen der Fachwerksberechnung und der geodätischen Streckennetzausgleichung auf höherer Ebene aufzuzeigen. Die Gleichgewichtsgleichung (erste Gleichung von (6.18)) entspricht der Kontrollgleichung der Streckennetzberechnung. Das Werkstoffgesetz der Mechanik steckt in der zweiten Gleichung (6.18). In der Netzausgleichung zeigt sich darin das sogenannte stochastische Modell, wohingegen die geometrischen Verträglichkeits- bzw. Kompatibilitätsgleichungen dem funktionalen Modell der Ausgleichung entspricht.

Der Zusammenhang zwischen den gedehnten Längen l , es gilt $l_0 + \underline{v} = l = \underline{f}(\underline{x})$, und den unbekanntenen Koordinaten \underline{x} lautet, wobei das Element die Punkte i und j verbinden soll,

$$l_{ij} = f_{ij}(\underline{x}) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.\tag{6.19}$$

Dieser Sachverhalt wird als geometrische Verträglichkeit bezeichnet. Das Werkstoffgesetz, d.h. die Gleichung $\underline{s} = \mathbf{K} \underline{v}$, wird näher betrachtet, indem die Diagonalelemente der Diagonalmatrix \mathbf{K} explizit angegeben werden, und zwar

$$k_{ii} = \frac{(EA)_{ii}}{l_{0i}}.\tag{6.20}$$

Dabei ist A die Querschnittsfläche und E der Elastizitätsmodul des Stabelementes. Die beiden letzten Gleichungen werden an dieser Stelle bewußt wiederholt, damit die formale Identität zur dreidimensionalen Streckennetzausgleichung deutlich wird.

Im allgemeinen werden die Unbekannten des Gleichungssystems nach (6.18) wie folgt gelöst. Nach Einführung der Jacobimatrix $\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} := \mathbf{A}$ und Einsetzen der Werkstoffgleichung in die Gleichgewichtsgleichung erhält man

$$\mathbf{A}^t \mathbf{K} \underline{v} = \underline{p}.\tag{6.21}$$

Die geometrische Verträglichkeitsgleichung muß noch eingearbeitet werden. Das soll ausnahmsweise hier einmal durch Linearisierung der Verbesserungsgleichungen, d.h. der geometrischen Verträglichkeitsgleichungen, geschehen. Es gilt allgemein

$$\underline{v} = \underline{f}(\underline{x}) - l_0 = \underline{f}(\underline{x}_i) + \frac{\partial f(\underline{x}_i)}{\partial \underline{x}} \underline{\Delta x} - l_0 = \mathbf{A} \underline{\Delta x} - (l_0 - \underline{f}(\underline{x}_i)) = \mathbf{A} \underline{\Delta x} - \tilde{l}.\tag{6.22}$$

Diese Gleichung wird nun in (6.21) eingesetzt. Dadurch erhält man die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \underline{\Delta x} = \underline{p} + \mathbf{A}^t \mathbf{K} \tilde{l}.\tag{6.23}$$

Die Inkremente der Unbekannten $\underline{\Delta x}$ ergeben sich zu

$$\underline{\Delta x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} (\underline{p} + \mathbf{A}^t \mathbf{K} \tilde{l});\tag{6.24}$$

und die Stabkräfte

$$\underline{s} = \mathbf{K}\underline{v} = \mathbf{K}(\mathbf{A}\underline{\Delta x} - \tilde{\underline{l}}) = \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}(\underline{p} + \mathbf{A}^t\mathbf{K}\tilde{\underline{l}}) - \tilde{\underline{l}}). \quad (6.25)$$

Nach Einführung der idempotenten Matrix $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{K}$ verkürzt sich diese Gleichung zu

$$\underline{s} = \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\underline{p} - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\tilde{\underline{l}}). \quad (6.26)$$

Diese Gleichung ist sehr aufschlußreich, denn sie zeigt uns, wie sich die Kraft \underline{s} im Stab zusammensetzt. Ein Teil dieser Kraft ist die Folge der äußeren Belastung \underline{p} , ein weiterer entsteht durch inneren Zwang aufgrund der statischen Unbestimmtheit.

$$\underline{s} = \underline{s}_{\text{Last}} + \underline{s}_{\text{Zwang}}. \quad (6.27)$$

Dieser Sachverhalt erinnert an das Kraftgrößenverfahren, bei dem die unabhängigen Stabendkräfte ebenfalls aus zwei Anteilen zusammengesetzt sind, wobei ein Anteil eine Linearkombination aus äußeren Lasten darstellt und der zweite eine aus den statisch Unbestimmten. Dabei handelt es sich nicht um die gleichen Anteile wie beim Kraftgrößenverfahren, denn hier ist kein bestimmtes Hauptsystem vorhanden.

Die Gleichung (6.26) ist sehr interessant und wird deshalb im folgenden noch etwas genauer untersucht. Dazu schreiben wir zunächst

$$\begin{aligned} \underline{s}_{\text{Last}} &= \mathbf{K}\mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\underline{p} \\ \underline{s}_{\text{Zwang}} &= -\mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\tilde{\underline{l}}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die Anteile der Stabkräfte, die eine Folge aus äußeren Lasten darstellen, sind von den Vorverformungen (z.B. Imperfektion oder Temperatur) völlig unabhängig. Sie sind lediglich mit der Geometrie und den Steifigkeiten des Tragwerkes korreliert, wie man an der ersten Gleichung von (6.28) ablesen kann.

Nun wollen wir überlegen, wie wir die Anteile der Stabkräfte interpretieren können, die infolge innerer Zwängung entstehen.

Dabei wird zunächst der Frage nachgegangen, was passiert, wenn überhaupt kein Ausgleichungsproblem vorliegt bzw. wenn ein statisch bestimmtes Fachwerk gegeben ist. In diesem Fall ist die Jakobi- oder Konfigurationsmatrix \mathbf{A} quadratisch, denn die Anzahl der unbekanntenen Knotenverschiebungen entspricht dann der Anzahl der linear unabhängigen Stabendkräfte, also hier den Zug- oder Druckkräften in allen Stabelementen. Die Matrix \mathbf{A} ist also quadratisch und im allgemeinen invertierbar. Diese Invertierbarkeit ist sehr leicht einzusehen, wenn man die Gleichung (6.22) etwas genauer betrachtet und sie - unter Beachtung der Tatsache, daß der Vektor der Elementverformungen (Verbesserungen) \underline{v} im Falle fehlender Redundanz den Nullvektor darstellt - noch einmal schreibt

$$\underline{0} = \mathbf{A}\underline{\Delta x} - \tilde{\underline{l}}. \quad (6.29)$$

Nach den Unbekannten aufgelöst, erhält man

$$\underline{\Delta x} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\underline{l}}. \quad (6.30)$$

Nun wollen wir die idempotente Matrix \mathbf{A}_0 von rechts mit der Jakobimatrix \mathbf{A} multiplizieren. Man erhält

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{A}. \quad (6.31)$$

Aus der obigen Gleichung kann man nun keinesfalls ableiten, daß die idempotente Matrix \mathbf{A}_0 die Einheitsmatrix darstellt. Wenn im Fall fehlender Redundanz die Jakobimatrix \mathbf{A} aber eine Inverse besitzt, kann die Gleichung (6.31) von rechts mit der Inversen multipliziert werden, wodurch sich

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_0 = \mathbf{E} \quad (6.32)$$

ergibt. Wenn also keine Redundanz vorliegt, gibt es keine Stabkräfte infolge innerer Zwängung, denn dann ist die idempotente Matrix \mathbf{A}_0 die Einheitsmatrix.

Wenn nun ein statisch unbestimmtes Problem vorliegt, können mit der zweiten Gleichung von (6.28) verschiedene Vorspannzustände durch Vorgabe des Vektors $\tilde{\underline{l}}$ erzeugt werden. Insbesondere erhalten wir in zwei Fällen keinen Vorspannzustand. Erstens: der Vektor $\tilde{\underline{l}}$ verschwindet identisch Null, d.h. alle Elemente lassen sich, obwohl mehr vorhanden sind als zur eindeutigen Bestimmung der Unbekannten notwendig wären, zwangsfrei einpassen; zweitens: das Produkt aus $(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)$ mit $\tilde{\underline{l}}$ verschwindet, obwohl der Vektor ungleich Null ist, d.h. es werden nur solche Elemente vorverformt eingebaut, die darauf mit einer hundertprozentigen Längenänderungen reagieren und keine Zwangskräfte aufbauen; aber dazu im nächsten Abschnitt mehr. Die Gleichung (6.28) kann also im Hinblick auf die Beschaffung von sinnvollen Vorspannzuständen interessant werden und verdient daher besondere Beachtung. Sie ist auch bei der Bestimmung von den Redundanzanteilen von Bedeutung, wie nunmehr gezeigt wird.

6.1.2.1 Redundanzanteile

Im folgenden soll überlegt werden, wie sich Änderungen der Einbaulängen, die mit $\underline{\nabla}l_0$ bezeichnet werden, auf die Kräfte auswirken. Es ergibt sich mit den Erkenntnissen des Kapitels 2 - die Produkte $(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\tilde{\underline{\nabla}}l$ und $(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\underline{\nabla}l_0$ sind identisch - sofort

$$\underline{\nabla}s = -\mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\tilde{\underline{\nabla}}l = -\mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\underline{\nabla}l_0, \quad (6.33)$$

wobei der Anteil aus Lasten $\mathbf{K}(\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\underline{p}$ auf die Änderung der Kräfte infolge der Änderung der Einbaulänge (Fertigungsungenauigkeiten oder Temperaturdifferenzen mögen verantwortlich sein) natürlich ohne Einfluß bleibt. Wenn man sich nun die Auswirkung einer einzigen Paßungenauigkeit auf eben diese Kraft berechnen möchte, so erhält man, wenn mit j dieses Element bezeichnet wird und der Redundanzanteil r_j das Diagonalelement j der Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)$ darstellt,

$$\nabla s_j = -\mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)_{jj}\tilde{\underline{\nabla}}l_j = -\mathbf{K}r_j\tilde{\underline{\nabla}}l_j = -\mathbf{K}r_j\underline{\nabla}l_{0j}. \quad (6.34)$$

Die Gleichung (6.34) führt auf eine ganze Reihe von Schlußfolgerungen. Bei kleinen Redundanzanteilen haben Imperfektionen fast keinen Einfluß auf die Kräfte. Wie man weiß, führen in statisch bestimmten Systemen Einbaufehler zu keinen inneren Zwängungen. Die Matrix \mathbf{A}_0 wird im Falle fehlender Redundanz zur Einheitsmatrix, wie oben ausführlich gezeigt wurde. Elemente mit großen Redundanzanteilen dagegen reagieren, was die Kraftänderung anbelangt, sehr empfindlich auf Paßungenauigkeiten. In einem nächsten Schritt wollen wir den Einfluß von Längenänderungen auf die Verformungen der Elemente untersuchen. Man erhält mit den Gleichungen (6.22) und (6.24) nach einigem Umstellen

$$\underline{\nabla}v = -(\mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\underline{\nabla}l_0. \quad (6.35)$$

Für eine einzige Imperfektion ist die Auswirkung auf die Elementverformung j folgende

$$\nabla v_j = -r_j\underline{\nabla}l_{0j}. \quad (6.36)$$

Dies überrascht uns keinesfalls, denn die Auswirkungen auf Kräfte und Elementverformungen eines Einbaufehlers müssen gleich wirken. In diesem Zusammenhang sollten [44] und [43] nicht unerwähnt bleiben.

6.1.2.2 Fehlerellipsen

Nun wollen wir noch den Einfluß einer Belastungsänderung auf die Koordinaten untersuchen (siehe dazu [61]). Wir erhalten sofort

$$\underline{\nabla}\underline{\Delta}x = (\mathbf{A}^t\mathbf{K}\mathbf{A})^{-1}\underline{\nabla}\underline{p}. \quad (6.37)$$

Die Knotenverformung eines Punktes unter Einheitslast kann direkt aus der inversen Steifigkeitsmatrix abgelesen werden. Die Fehlerellipsen der Punkte in der Ausgleichsrechnung (siehe dazu [33],[85]) zeigen demnach auf anschauliche Weise, wie stark und in welche Richtung die Knoten der Fachwerke durch die Tragwerkselemente stabilisiert sind. Sie können als Hilfsmittel zur Beurteilung von Tragwerken herangezogen werden.

Dieser Sachverhalt wird im folgenden am Beispiel eines zweidimensionalen Fachwerkes hergeleitet. Die nachfolgenden Vereinbarungen werden getroffen. Die Verschiebungen des Punktes in x - und y -Richtung lauten r_x und r_y . Die Kräfte, unter welchen die Verschiebungen auftreten, werden mit p_x und p_y bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen \underline{r} und den Kräften \underline{p} wird über die inverse Steifigkeitsmatrix bzw. die Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1}$ hergestellt.

Es gilt also mit den neuen Bezeichnungen

$$\underline{r} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} \underline{p} = \mathbf{F} \underline{p}. \quad (6.38)$$

Insbesondere erhalten wir in dem Fall, daß nur die Lasten auf dem zu betrachteten Punkt ungleich Null sind $\underline{r}_p = \mathbf{F}_p \underline{p}_p$. Ausführlich geschrieben erhalten wir für den zweidimensionalen Fall ohne die tiefgestellten Zeiger

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Wir wollen nun das (x, y) Koordinatensystem verlassen und uns überlegen, wie sich die Gleichung (6.39) verändert, wenn wir auf ein (ξ, η) Koordinatensystem übergehen, wobei die beiden Koordinatensysteme um den Winkel θ gegeneinander verdreht sind. (Zum Erhalt des neuen Systemes wird die x -Achse positiv um den Winkel θ zur y -Achse hin gedreht.) Die Verschiebungen im neuen System werden mit r_ξ und r_η , die Lasten im neuen System mit p_ξ und p_η bezeichnet. Wir erhalten mit der orthogonalen Drehmatrix \mathbf{T}

$$\underline{r} = \mathbf{T} \tilde{\underline{r}} \quad \text{und} \quad \underline{p} = \mathbf{T} \tilde{\underline{p}}. \quad (6.40)$$

Wir wollen auch diese Gleichungen ausschreiben

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\xi \\ r_\eta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Die Gleichungen (6.41) werden in die Gleichung (6.39) eingesetzt und das Ergebnis wird mit der Inversen der Drehmatrix multipliziert. Dabei wird die Tatsache benutzt, daß die Inverse einer orthogonalen Drehmatrix mit dem Maßstab Eins ihrer Transponierten entspricht, d.h. $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^t$. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} r_\xi \\ r_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

In Matrixschreibweise erhält man

$$\tilde{\underline{r}} = \mathbf{T}^t \mathbf{F} \mathbf{T} \tilde{\underline{p}} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\underline{p}}. \quad (6.43)$$

Wir wollen nun den Winkel θ bestimmen, bei dem das Element $\tilde{f}_{xy} = \tilde{f}_{yx}$ identisch Null verschwindet; man erhält

$$\tilde{f}_{xy} = f_{xx}(-\cos \theta \sin \theta) + f_{xy}(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + f_{yy}(\cos \theta \sin \theta) = 0. \quad (6.44)$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Sätze $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta$ und $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ erhält man nach einigem Umformen

$$\tan 2\theta = \frac{2f_{xy}}{f_{xx} - f_{yy}}. \quad (6.45)$$

Mit der Bestimmung des Winkels θ liegen die Hauptdiagonalelemente der Matrix $\tilde{\mathbf{F}}$ vor. Sie lauten im einzelnen

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{xx} &= f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta \\ \tilde{f}_{yy} &= f_{xx} \sin^2 \theta - 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Natürlich hätte man diese Größen auch erhalten, indem man von der Matrix \mathbf{F} die Eigenwerte und die Eigenvektoren bestimmt hätte. Die beiden Eigenvektoren entsprechen dabei den Spalten der Transformationsmatrix \mathbf{T} und die Eigenwerte sind die Elemente \tilde{f}_{xx} und \tilde{f}_{yy} . Wir wollen uns nun die Verschiebungen unter Einheitslasten im Koordinatensystem (ξ, η) anschauen.

$$\begin{bmatrix} r_\xi \\ r_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{xx} & 0 \\ 0 & \tilde{f}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Wir erkennen sofort, daß es sich bei dieser Gleichung um eine Ellipsengleichung handelt, wenn wir voraussetzen, daß die Last vom Betrag p aus allen Richtungen auf den Punkt wirkt, wenn also gilt

$$p_\xi = p \cos \phi \quad \text{und} \quad p_\eta = p \sin \phi. \quad (6.48)$$

Dann erhalten wir, indem die Gleichung (6.48) in die Gleichung (6.47) eingesetzt wird, die Ellipsengleichung

$$\begin{aligned} r_\xi &= p \tilde{f}_{xx} \cos \phi \\ r_\eta &= p \tilde{f}_{yy} \sin \phi. \end{aligned} \quad (6.49)$$

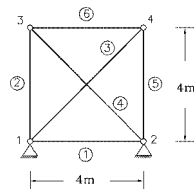
Dies entspricht, wenn der Betrag der Belastung auf Eins gesetzt wird, wenn also $p = 1$ gilt, folgender Gleichung

$$\frac{r_\xi^2}{\tilde{f}_{xx}^2} + \frac{r_\eta^2}{\tilde{f}_{yy}^2} = p^2 = 1, \quad (6.50)$$

in welcher man sofort die übliche Darstellung einer Ellipse erkennt.

6.1.3 Beispiele

6.1.3.1 Fachwerk A



$$EA = 100000\text{KN}$$

Abbildung 6.2: Zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk

Element	Von	Nach	Redundanzanteil [-] Gesamtsystem	Redundanzanteil[-] ohne Element 1	Redundanzanteil [-] ohne die Elemente 1 und 3
1	1	2	1.000	elim.	elim.
2	1	3	0.116	0.116	0.000
3	1	4	0.327	0.327	elim.
4	2	3	0.327	0.327	0.000
5	2	4	0.116	0.116	0.000
6	3	4	0.116	0.116	0.000
			$\sum = 2.000$	$\sum = 1.000$	$\sum = 0.000$

Tabelle 6.1: Redundanzanteile der Fachwerkstäbe

Dieses kleine Fachwerk (Abb. 6.2) soll das im vorigen Abschnitt vertiefte Wissen über Redundanzanteile verdeutlichen. Wir erkennen an diesem Beispiel sofort, daß die Gesamtredundanz 2 beträgt, denn 6 Fachwerkstäbe haben 2 Knoten mit je 2 Freiheitsgraden im zweidimensionalen Raum zu stabilisieren. Mit der Abzählregel der ebenen Statik ergibt sich natürlich ebenso die statische Unbestimmtheit von 2, weil $n = a + p - 2k$ gilt, wobei n die statische Unbestimmtheit (2), a die Anzahl der Auflagerreaktionen (4), p die Anzahl der Fachwerkstäbe (6) und k die Anzahl aller Knotenpunkte (4) darstellen. Wir wollen uns nun die Auswirkungen einer Imperfektion auf das Ergebnis vor Augen führen und verkürzen aus diesem Grund den Stab 3 um 1cm ($LF V$). Mit dem Redundanzanteil kann nach der Gleichung (6.34) die Kraftänderung, die aus dieser Verkürzung entsteht, direkt bestimmt werden.

Es gilt

$$\nabla s_3 = -K_3 r_3 \nabla l_{0_3} = -\frac{EA_3}{l_{0_3}} r_3 \nabla l_{0_3} = -\frac{100000 \text{ KN}}{5.657 \text{ m}} 0.327(-0.01 \text{ m}) = 57.81 \text{ KN}. \quad (6.51)$$

Zur Kontrolle dieser Berechnung wird der Lastfall Verkürzung des Stabes 3 um 1cm ($LF V$) wirklich berechnet. Folgende Stabkräfte (Tabelle 6.2) werden ermittelt, wobei die negativen Kräfte Druck und die positiven Zug bedeuten. Dieses Ergebnis ist ganz unabhängig davon, ob ein Kraftlastfall überlagert ist oder nicht. Aus diesem Grund werden auch die Ergebnisse eines Kraftlastfalles ohne ($LF P$) und mit ($LF PV$) Verkürzung des Elementes 3 um 1cm angegeben. Man erkennt sofort, daß die Stabkraft 3 im Fall der Verkürzung des Elementes 3 bei Anwesenheit der äußeren Lasten P auch um den mit dem Redundanzanteil berechneten Betrag von 57.81KN ansteigt, also

$$s_{3PV} = s_{3P} + \nabla s_3 = 92.97 \text{ KN} + 57.81 \text{ KN} = 150.78 \text{ KN} \approx 150.52 \text{ KN} \quad (6.52)$$

Element	Kräfte $LF V$ [KN]	Kräfte $LF P$ [KN]	Kräfte $LF PV$ [KN]	Verformungen $LF V$ [mm]
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	-40.84	-64.82	-106.08	-1.63
3	57.71	92.97	150.52	3.26
4	57.82	-190.99	-132.78	3.27
5	-40.84	-165.54	-206.25	-1.63
6	-40.86	34.67	-6.31	-1.63

Tabelle 6.2: Kräfte und Verformungen der Fachwerkstäbe

Die Änderung der Elementverformung infolge einer Imperfektion berechnet sich wie folgt für das Element 3 im Lastfall V

$$\nabla v_3 = -r_3 \nabla l_{0_3} = -0.327(-0.01 \text{ m}) = 0.00327 \text{ m} = 3.27 \text{ mm}. \quad (6.53)$$

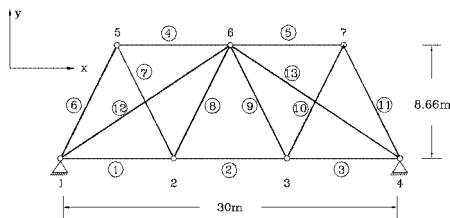
An diesem Beispiel wird eines ganz deutlich. Ein Element (1) mit dem Redundanzanteil 1 wird eine mögliche Imperfektion durch eine hundertprozentige Erhöhung der Stabkraft kompensieren, wohingegen ein Element mit dem Redundanzanteil 0 eine Imperfektion durch eine kraftlose Längenänderung

abbaut. An diesen Redundanzanteilen erkennt der im Entwurfsprozeß stehende Ingenieur die Empfindlichkeit der Tragwerkelemente in bezug auf Paßungenauigkeiten ohne Wiederholungsberechnungen sofort. Diese Redundanzanteile zeigen darüberhinaus an, wo sich die statische Unbestimmtheit in der Tragwerksstruktur befindet. Man kann diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: die Tragwerkelemente i dienen in erster Linie dazu, die Tragwerksknoten im Raum zu stabilisieren. Dafür steht ein ganz bestimmter Anteil $(1 - r_i)$ des Tragwerkelementes. Mit dem verbleibenden Anteil (r_i) schafft das Element gewissermaßen Reserven, die - im Falle von Ausfällen etwa - vorhanden sein müssen, um das gesamthafte Tragwerksversagen zu verhindern. Wir können demnach die Schlußfolgerungen ziehen: die Redundanzen haben sich gleichmäßig auf alle Elemente zu verteilen. Zu vermeiden sind Elemente mit der Redundanz 0 oder 1, denn Elemente mit der Redundanz 0 führen beim Ausfall zum Versagen von Systemteilen oder der Gesamtstruktur, und Elemente mit dem Redundanzanteil 1 haben keine sicherheitsrelevanten Auswirkungen, d.h. ihr Ausfallen ändert an der Sicherheit des Tragwerkes nichts; die Anzahl der Elemente wird dabei lediglich um 1 vermindert, womit sich auch die Redundanz um 1 erniedrigt. Diese Tatsache beweist, daß die Gesamtredundanz fast nichts über die Sicherheit des Tragwerkes aussagt, sie gibt nur sehr bedingt Auskunft über die Tragwerksreserven.

Eine auf alle Elemente gleichermaßen verteilte Redundanz ist anzustreben. Mit anderen Worten: redundanzfreie bzw. schwach redundante Tragwerksteile sind zu vermeiden. Abschließend soll sehr deutlich gesagt werden, daß die statische Unbestimmtheit, also die Redundanz, mit der Sicherheit bzw. Robustheit des Tragwerkes nur dann einhergeht, wenn die oben erwähnten Gesichtspunkte beachtet werden.

Im folgenden soll auf eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Redundanzanteile hingewiesen werden: die Ausmagerung, d.h. das systematische Eliminieren (Weglassen) von zumindest teilredundanten Elementen bis hin zur statischen Bestimmtheit von Tragwerken. Im vorigen Absatz wurde bereits gezeigt, daß der Wegfall des Elementes 1 keinerlei Einfluß auf die Sicherheit des Gesamtsystemes hat. Da nach der Elimination dieses Elementes noch die Gesamtredundanz von 1 bleibt, kann in einem weiteren Schritt beispielsweise das Element 3 weggelassen werden, wodurch sich ein statisch bestimmtes System ergibt. Die fünfte und sechste Spalte von Tabelle 6.1 zeigen diesen Sachverhalt.

6.1.3.2 Fachwerk B



$$EA = 100000\text{KN}$$

Abbildung 6.3: Dreifach statisch unbestimmtes Fachwerk

Ein weiteres Beispiel (Abb. 6.3) aus der zweidimensionalen Statik soll mit Hilfe von Redundanzanteilen die Beurteilung von Tragwerken veranschaulichen. Das abgebildete Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Dabei gilt wie oben $n = a + p - 2k$, hier also $3 = 4 + 13 - 2 \cdot 7$; die Redundanzanteile der einzelnen Elemente können wiederum der Tabelle 6.3 entnommen werden.

Element	Von	Nach	Redundanzanteil [-] Gesamtsystem	Redundanzanteil[-] ohne Element 12	Redundanzanteil [-] ohne die Elemente 12 und 13
1	1	2	0.388	0.345	0.333
2	2	3	0.357	0.345	0.333
3	3	4	0.388	0.378	0.333
4	5	6	0.102	0.000	0.000
5	6	7	0.102	0.101	0.000
6	1	5	0.102	0.000	0.000
7	2	5	0.102	0.000	0.000
8	2	6	0.102	0.000	0.000
9	3	6	0.102	0.000	0.000
10	3	7	0.102	0.101	0.000
11	4	7	0.102	0.101	0.000
12	1	6	0.527	elim.	elim.
13	4	6	0.527	0.527	elim.
			$\Sigma = 3.000$	$\Sigma = 2.000$	$\Sigma = 1.000$

Tabelle 6.3: Redundanzanteile der Fachwerkstäbe

Durch die Einzelredundanzen erkennt man das, was man gefühlsmäßig auch erwarten durfte: die beiden Diagonalen, die Elemente 12 und 13, dienen gewissermaßen zur Erhöhung der Sicherheit. Sie besitzen die größten Redundanzanteile. Wir wollen nun nachvollziehen, wie sich die Redundanz ändert, wenn eines dieser Elemente (Stab 12) entfernt wird (fünfte Spalte der Tabelle 6.3). Wir wissen im voraus, daß sich durch diese Maßnahme die Gesamtredundanz um 1 auf 2 verringert. Obwohl aber nach dieser Elimination des Stabes 12 die Gesamtredundanz 2 verbleibt, ist es jetzt nicht mehr möglich, aus den verbleibenden 12 Stäben einen beliebigen zu entfernen. So würde die Wegnahme einer der Stäbe, welche den Redundanzanteil 0 aufweisen, zum Versagen der gesamten Struktur führen, d.h., aus den Elementen 4, 6, 7 und 8 darf keines entfernt werden. Die Elimination von Element 13 hat zur Folge, daß nur noch Redundanzen im Untergurt verbleiben (sechste Spalte der Tabelle 6.3).

Aus diesem Grund kann einer der drei Untergurtstäbe (1, 2 oder 3) noch entfernt werden zum Erhalt der statischen Bestimmtheit; das gleiche Resultat würde man durch die Herstellung einer statisch bestimmten Lagerung bekommen.

Wie bereits erwähnt, besteht die Aufgabe der Tragwerkselemente darin, die Knoten im Raum so zu stabilisieren, daß sie den angreifenden äußeren Lasten standhalten. Wie der einzelne Punkt nun etwa durch ein Fachwerk gegen äußere Lasten stabilisiert ist, kann durch die Fehlerellipsen veranschaulicht werden. Diese Fehlerellipsen werden natürlich nur im zweidimensionalen Fall verwendet; im allgemeinen dreidimensionalen Raum erhält man Fehlerellipsoide, die sich allerdings weniger gut darstellen lassen. Wir wollen die Fehlerellipsen nun für das Tragwerk von oben angeben.

Im dreifach statisch unbestimmten Fall, der symmetrisch ist (Abb. 6.4), sind alle Punkte etwa gleich stabil, denn die Flächeninhalte der Fehlerellipsen aller Punkte sind nahezu identisch. Die Richtungen der Hauptachsen erscheinen uns ebenfalls sinnvoll. Der Punkt 6 beispielsweise ist sicherlich weniger gut in y -Richtung stabilisiert als in x -Richtung. Die beiden Festpunkte besitzen natürlich keine Fehlerellipsen.

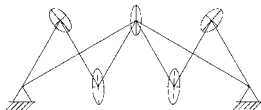


Abbildung 6.4: Dreifach statisch unbestimmtes Fachwerk mit Fehlerellipsen

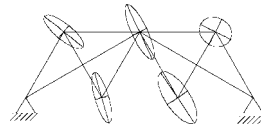


Abbildung 6.5: Zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk mit Fehlerellipsen

Nach der Entfernung des Stabes 12 (Abb. 6.6) vergrößern sich die Fehlerellipsen der Punkte 2, 3 und 6. Die Ellipsen der Punkte 5 und 7 verändern sich praktisch nicht. Dieses Ergebnis überrascht uns keineswegs, denn der Redundanzanteil des Stabes 12 ist deutlich kleiner als 1 (0.527), woraus sofort folgt, daß ein bestimmter Anteil (1-0.527) des Stabes 12 zur Stabilisierung der Knoten aufgebraucht wird. Die Elimination dieses Stabes trägt also zwangsläufig zur Destabilisierung des Tragwerkes bei. Nur ein Element mit dem Redundanzanteil 0 hätte keine Auswirkung im Falle einer Elimination. Auf diese Weise lassen sich noch weitere Stäbe entfernen, bis schließlich nur noch das statisch bestimmte System übrigbleibt. Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß das statisch unbestimmt gelagerte, aber insgesamt statisch bestimmte System (Abb. 6.8), wesentlich kleinere Fehlerellipsen aufweist als das übliche statisch bestimmt gelagerte (Abb. 6.9).

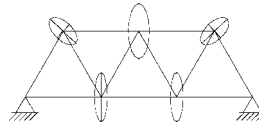
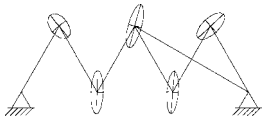


Abbildung 6.6: Zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk mit Fehlerellipsen

Abbildung 6.7: Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk mit Fehlerellipsen

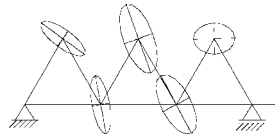
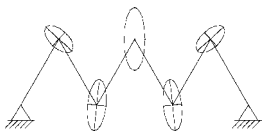


Abbildung 6.8: Statisch bestimmtes Fachwerk mit Fehlerellipsen

Abbildung 6.9: Statisch bestimmtes Fachwerk mit Fehlerellipsen

Hier werden nun in Tabellenform die Halbachsen der Fehlerellipsen des statisch bestimmt gelagerten Systems (Abb. 6.9)

Knoten	u-Achse [0.001mm]	v-Achse [0.001mm]	Drehwinkel [gon]
2	116.	388.	112.
3	198.	431.	131.
4	375.	0.	100.
5	354.	122.	60.
6	200.	481.	122.
7	274.	202.	102.

Tabelle 6.4: Halbmesser und Drehwinkel der Fehlerellipsen

mit den Halbachsen des Systems (Abb. 6.8) verglichen.

Knoten	u-Achse [0.001mm]	v-Achse [0.001mm]	Drehwinkel [gon]
2	83.	324.	100.
3	83.	324.	100.
5	232.	120.	53.
6	139.	361.	100.
7	232.	120.	147.

Tabelle 6.5: Halbmesser und Drehwinkel der Fehlerellipsen

6.2 Seilnetze

6.2.1 Zur Bedeutung der Seilnetze

Das Bauen von Seilnetzen und Membranen ist sehr eng mit dem Namen Otto verknüpft, der schon 1954 in seiner Dissertation [73] die Bedeutung von zugbeanspruchten Konstruktionen erkannte. Diese Thematik beschäftigte ihn auch weiterhin; 1962 erschien [74].

Seilnetze bestehen aus sich kreuzenden Seilscharen. Die Vorspannungen sind die Zugspannungen, die im eingewichtslosen Zustand die Form gewährleisten. Je nach Größe und Verteilung der Spannungen lassen sich beliebige sattelförmig gekrümmte Flächen entwickeln. Entscheidend für den Entwurf und die Berechnung dieser Seilnetze ist, daß die Netzform nicht zeichnerisch entwickelt werden kann; sie ergibt sich vielmehr im Spiel der Vorspannkraft, siehe dazu z.B. [26]. Damit kann der gängige Weg beim Entwurf von Bauwerken nicht beschritten werden. Aus diesem Dilemma führt der Modellbau mit den bekannten Schwierigkeiten, daß die Modelle in die Realität zu übertragen sind. Die Lösung dieser Problematik gelang zuerst Otto mit dem deutschen Pavillon auf der Weltausstellung 1967 in Montreal [75]; danach entstanden eine ganze Reihe von Seilnetzen, z.B. die Olympiadächer von München. Der Wunsch nach der Berechenbarkeit dieser Konstruktionen wuchs. So wurden analytische Formfindungsmethoden entwickelt, die die Erzeugung von Computermodellen erlaubten. Diese Modelle wurden mit Materialeigenschaften versehen und statisch analysiert. Die Abwicklung der Flächen bzw. die Bestimmung exakter Seillängen war der letzte Schritt bei der Berechnung von Seilnetzen. Umfassende Softwarepakete zur Berechnung von Seilnetzen entstanden; aus diesem gingen Programmsysteme für Membranen hervor [41], [40] und [38]. Das allgemeinere Problem der optimalen Schale wird in [81] behandelt.

Die Bedeutung von Seilnetzen für das Bauwesen wird deutlich, wenn man sich ihren Hauptvorteil vor Augen führt: die Leichtigkeit. Anders ausgedrückt: das Verhältnis von Masse zur Spannweite ist bei Seilnetzen (im allgemeinen) kleiner als bei anderen Konstruktionen. Weiterhin verhindern die Zugkräfte in den Seilen Stabilitätsprobleme; es gibt kein lästiges Knicken.

6.2.2 Zur Theorie der Seilnetze

Im Gegensatz zu Fachwerken sind Seilnetze Strukturen, die über die elastische Steifigkeit hinaus einer sogenannten geometrischen Steifigkeit bedürfen, um funktionsfähig zu sein. Diese geometrische Steifigkeit wird durch bewußtes Vorspannen sofort verfügbar. Man kann sie aber auch dadurch aktivieren, daß man äußere Lasten aufbringt, deren Folgen innere Schnittgrößen sind, die die Steifigkeit einzelner Elemente ebenfalls erhöhen können. Wir wollen diesen Sachverhalt an einem kleinen Beispiel verdeutlichen.

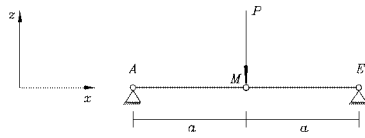


Abbildung 6.10: Prinzipische Skizze zur Verdeutlichung der geometrischen Steifigkeit

Zwischen den festen Punkten A und E sind 2 Seilstücke gespannt und mit einer dazu senkrecht wirkenden Einzellast P im Punkt M belastet. Zur Berechnung der Verschiebungen des Punktes M bedarf es nun der Steifigkeit in x - und z -Richtung. Die elastischen Anteile der Steifigkeit schaffen keine Beiträge in z -Richtung, d.h. ohne die Aktivierung der geometrischen Steifigkeit ergäbe sich ein singuläres Gleichungssystem. Die geometrische Steifigkeit kann nun so erklärt werden. Durch Vorspannung oder äußere Lasten werden in einzelnen Elementen Zugkräfte induziert; diese inneren Kräfte erhöhen die Steifigkeit der Elemente. Dieser Zuwachs an Steifigkeit wird als geometrische Steifigkeit bezeichnet. Im Fall von Druckkräften vermindert sich die Gesamtsteifigkeit um die geometrische Steifigkeit. Wir wollen uns diesen Sachverhalt im folgenden kurz herleiten. Dazu benötigen wir das Gesamtpotential Π_S des Seilnetzes, also

$$\Pi_S(\underline{x}, \underline{v}, \underline{s}) = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v}}_{\Pi_i} - \underbrace{\underline{s}^t (\underline{l}_0 + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x}))}_{0} - \underbrace{\underline{p}^t (\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat.} \quad (6.54)$$

Folgende Normalgleichungen ergeben sich

$$\frac{\partial \Pi_S}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{K} (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}_0) - \underline{p} = \underline{0}. \quad (6.55)$$

Auf diese Gleichung wird nun die Taylorentwicklung angewendet, wobei von vorhandenen Näherungswerten ausgegangen wird. Es gilt also unter der Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung $\underline{g}(\underline{x}_i) = \underline{g}(\underline{x}_{i-1}) + \frac{\partial \underline{g}(\underline{x}_{i-1})}{\partial \underline{x}} \underline{\Delta x}_i$. i bedeutet in diesem Zusammenhang die Anzahl der Iterationen. Damit ergibt sich für die Gleichung (6.55) unter Anwendung der Kettenregel bei der Differentiation

$$\left[\left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{K} \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right) + \left(\frac{\partial^2 \underline{f}(\underline{x})}{(\partial \underline{x})^2} \right) \mathbf{K} (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}_0) \right] \underline{\Delta x} = - \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \mathbf{K} (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}_0) + \underline{p}. \quad (6.56)$$

In dem Kapitel über die Ausgleichsrechnung haben wir verkürzt

$$\mathbf{G} \underline{\Delta x} = [\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{Z}] \underline{\Delta x} = -\mathbf{A}^t \mathbf{K} (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}_0) + \underline{p} \quad (6.57)$$

geschrieben.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{G} setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil, also das Produkt $\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}$ wird dabei als elastische Steifigkeit und die Matrix \mathbf{Z} der zweiten Ableitungen als geometrische bezeichnet.

Im folgenden werden wir uns die Anteile berechnen, mit denen die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{G} beaufschlagt wird, wenn ein Seilelement i mit dem Anfangsknoten k und dem Endknoten j betrachtet wird. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich durch Summation dieser Anteile von Einzelementen über alle Seile. An dieser Stelle sei eine Anmerkung zur Schreibweise erlaubt: diejenigen Matrizen, die

lediglich die Anteile eines Seilelementes beinhalten, werden im Gegensatz zu den üblichen Matrizen dünn geschrieben. Es gilt

$$\begin{aligned} f_i(x_k, y_k, z_k, x_j, y_j, z_j) = l_i = l &= \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2} \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Die Ableitungen dieser Funktion nach den unbekanntem Koordinaten werden im Vektor \underline{a} zusammengefaßt. Für den transponierten Vektor kann also

$$\underline{a}_i^t = \underline{a}^t = \left(\frac{\Delta x}{l}, \frac{\Delta y}{l}, \frac{\Delta z}{l}, -\frac{\Delta x}{l}, -\frac{\Delta y}{l}, -\frac{\Delta z}{l} \right) \quad (6.59)$$

geschrieben werden.

Die Anteile der elastischen Steifigkeit lauten mit der reduzierten Steifigkeit $K_i = K = \frac{EA}{l_0}$ eines Seilelementes i mit der Zugsteifigkeit EA und der ungedehnten Länge l_0 sehr einfach, nämlich

$$\underline{a} K \underline{a}^t = K \begin{bmatrix} \frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta z}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta z}{l^2} \\ \frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta z}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta z}{l^2} \\ \frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta z}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta z}{l^2} \\ -\frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta z}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta z}{l^2} \\ -\frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta z}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta z}{l^2} \\ -\frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta z}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta z}{l^2} \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

An dieser elastischen Steifigkeitsmatrix erkennt man sofort, weshalb der Punkt M des Beispiels nur mit der geometrischen Steifigkeit stabilisiert werden kann. Die elastischen Anteile in z -Richtung verschwinden, denn Anfangs- und Endknoten liegen auf derselben Höhe, d.h. $z = \text{const.}$ oder $\Delta z = 0$, was bedeutet, daß die elastische Steifigkeitsmatrix an dieser Stelle keine Anteile besitzt, womit gezeigt ist, daß die geometrische Steifigkeit in diesem Fall unbedingt erforderlich ist.

Nun wollen wir die Matrix der zweiten Ableitungen bilden und richten unser Augenmerk aus diesem Grund auf das Produkt $K(f(\underline{x}) - l_0) = K(l - l_0) = K v = s$. Wir erkennen sofort, daß es sich um die Seilkraft handelt. Die Matrix der zweiten Ableitungen entsteht nun, indem die Elemente des Vektors \underline{a} der Reihe nach nach allen Unbekannten abgeleitet und mit der Seilkraft s multipliziert werden. Man erhält

$$Z = \frac{K(l - l_0)}{l} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta z}{l^2} & -1 + \frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta z}{l^2} \\ -\frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & 1 - \frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta z}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & -1 + \frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta z}{l^2} \\ -\frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & 1 - \frac{\Delta z \Delta z}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & -1 + \frac{\Delta z \Delta z}{l^2} \\ -1 + \frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta x \Delta z}{l^2} & 1 - \frac{\Delta x \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta x \Delta z}{l^2} \\ \frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & -1 + \frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & \frac{\Delta y \Delta z}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta x}{l^2} & 1 - \frac{\Delta y \Delta y}{l^2} & -\frac{\Delta y \Delta z}{l^2} \\ \frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & \frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & -1 + \frac{\Delta z \Delta z}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta x}{l^2} & -\frac{\Delta z \Delta y}{l^2} & 1 - \frac{\Delta z \Delta z}{l^2} \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

An dieser Matrix wird deutlich, daß bei unserem Beispiel nunmehr Steifigkeit in z -Richtung vorhanden ist, sofern Seilkräfte, d.h. positive Kräfte, vorliegen.

Aufgrund der einfacheren Bildung der Normalgleichungen wird die Trennung von elastischer und geometrischer Steifigkeit am Institut des Verfassers traditionell anders durchgeführt. Das Gewicht bzw. die reduzierte Steifigkeit der elastischen Anteile wird geändert, und zwar von $K_{\text{alt}} = \frac{EA}{l_0}$ in

$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 - \frac{l-l_0}{l}) = \frac{EA}{l}$. Damit setzt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix wie folgt zusammen: K_{neu} wird anstelle von $K = K_{\text{alt}}$ mit der Matrix nach Gleichung (6.60) multipliziert. Die neuen geometrischen Anteile Z_{neu} ergeben sich dann wie folgt zu

$$Z_{\text{neu}} = \frac{s}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Das Verhältnis von Kraft zu Länge wird auch in diesem Zusammenhang als Kraftdichte bezeichnet und zur Formfindung von leichten Flächentragwerken benützt. Der Hauptteil dieser Matrix Z_{neu} entspricht der geometrischen Steifigkeit. Im Kapitel 2 wurde ausgeführt, daß die Mitnahme der zweiten Ableitungen zu einem Redundanzgewinn führen kann, wenn die Eigenwerte der Matrix positiv sind. Das ist hier der Fall. Wenn man die Matrix Z unter der Voraussetzung einer positiven Kraftdichte, einer Zugkraft also, in Eigenwerte und -vektoren zerlegt, erhält man einen dreifachen positiven Eigenwert und drei Eigenwerte Null. Bei der Matrix nach Gleichung (6.62) besitzt dieser dreifache Eigenwert den Wert 2. Dies bedeutet, daß die Mitnahme der zweiten Ableitungen im Falle des zugbeanspruchten Seiles einen Redundanzgewinn von 3 pro Seil ergibt, denn die Zerlegung in Eigenwerte und -vektoren hat gezeigt, daß wenigstens 3 Verbesserungsgleichungen notwendig sind, um die Anteile aus den zweiten Ableitungen zu erzeugen. Im folgenden wollen wir uns im Detail überlegen, wie diese Fehlergleichungen für ein Seilelement aussehen. Die Fehlergleichungen für die elastischen Anteile lauten für ein einzelnes Seilelement mit dem Gewichten p_{ela1} und p_{ela2}

$$\begin{aligned} l_0 + v_{\text{ela1}} &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} & p_{\text{ela1}} &= \frac{EA}{l_0} \\ 0 + v_{\text{ela2}} &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} & p_{\text{ela2}} &= -\frac{EA}{l_0} \left(\frac{l-l_0}{l} \right) = -q. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Aus Gründen, die den korrekten Aufbau der rechten Seite betreffen, werden die Anteile der elastischen Steifigkeit durch zwei Fehlergleichungen aufgebaut, obwohl die Steifigkeitsmatrix - wie oben dargelegt wurde - mit dem Gewicht K_{neu} mit nur einer Fehlergleichung besetzt werden könnte. Dann allerdings ergäbe sich eine fehlerhafte rechte Seite; deshalb wird im Hinblick auf den Aufbau der rechten Seite die elastische Fehlergleichung in zwei aufgespalten. Da zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix jedoch eine ausreichen würde, werden diese beiden Verbesserungsgleichungen hinsichtlich der Redundanz wie eine gezählt und zwar mit dem Gewicht K_{neu} ; oder anders ausgedrückt: da sich die Normalgleichungsmatrix mit einer Verbesserungsgleichung aufbauen ließe, beträgt die Redundanz der elastischen Steifigkeit - pro Seilelement natürlich - eins. Ein weiterer Grund für diese Betrachtungsweise liegt darin, immer die kleinstmögliche Anzahl von Verbesserungsgleichungen, welche die Anteile der zweiten Ableitungen in der Normalgleichungsmatrix aufbauen können, zu bilden. Mit diesem Vorgehen liegt man immer auf der sicheren Seite, denn man erzeugt damit die kleinstmögliche Gesamtredundanz.

Für die geometrischen Anteile ergeben sich nachfolgende drei Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} 0 + v_{\text{geox}} &= x_k - x_j & p_{\text{geo}} &= q = \frac{s}{l} \\ 0 + v_{\text{geoy}} &= y_k - y_j & p_{\text{geo}} &= q = \frac{s}{l} \\ 0 + v_{\text{geoz}} &= z_k - z_j & p_{\text{geo}} &= q = \frac{s}{l}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Die Zerlegung in Eigenwerte und -vektoren hat gezeigt, daß wenigstens drei Fehlergleichungen notwendig sind, denn drei Eigenwerte der geometrischen Steifigkeitsmatrix sind positiv. Eine Kontrolle

der angegebenen Gleichungen kann nun sehr einfach erfolgen, indem die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen gebildet wird; sie muß der inneren Energie Π_i des Seilnetzes entsprechen. Die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen des Seilnetzes lautet

$$\sum \left(v_{\text{ela1}}^2 p_{\text{ela1}} + \underbrace{v_{\text{ela2}}^2 p_{\text{ela2}} + (v_{\text{geox}}^2 + v_{\text{geoy}}^2 + v_{\text{geoz}}^2) q}_{=0} \right) = \sum v_{\text{ela1}}^2 p_{\text{ela1}} = \Pi_i. \quad (6.65)$$

Zusammenfassend kann gesagt werden: obwohl die Mitnahme der zweiten Ableitungen das innere Potential im Minimalpunkt (Lösungspunkt) nicht verändert, ergeben sich andere Steifigkeitswerte. Die Differenz der Steifigkeitswerte zwischen Mitnahme und Weglassen zweier Ableitungen bezeichnet man als geometrische Steifigkeit. Diese geometrische Steifigkeit ist durch zusätzliche Verbesserungsgleichungen aufzubauen; dabei ist zu beachten, daß die kleinstmögliche Anzahl von Zusatzgleichungen gebildet wird. Jede Zusatzgleichung erhöht die Redundanz um eins. Dies gilt nur, wenn das Gewicht der Fehlergleichung positiv ist. Aus diesem Grund sind negative Gewichte unzulässig. Zusatzgleichungen mit negativen Gewichten werden einfach nicht herangezogen. Die Steifigkeit für ein Seilelement kann mit vier Fehlergleichungen in die Steifigkeitsmatrix eingebaut werden. Eine Gleichung wird als elastische und drei Gleichungen werden als geometrische bezeichnet. Dasselbe gilt für ein gezogenes Stabelement. Ein gedrücktes Stabelement dagegen besitzt die Redundanz eins, und zwar aus der elastischen Gleichung, da die geometrischen negative Gewichte haben und aus diesem Grund nicht aufgebaut werden.

Dieses willkürlich anmutende Vorgehen bedarf der Erläuterung: Die Kondition einer Matrix wird im allgemeinen durch eine Verbesserungsgleichung mit positivem Gewicht erhöht und durch eine mit negativem vermindert. Aus diesem Grund vergrößert sich der Konvergenzradius durch diese Maßnahme - Berücksichtigung der zweiten Ableitungen (geometrischen Steifigkeit) - enorm. Dies ist aber bei Seilnetzen von großer Bedeutung, denn bei extremen Lasten fallen ganze Seilscharen aus. Dies sollte aber keineswegs zur Divergenz bei der Berechnung führen, denn diese Gleichgewichtslagen sind zu bestimmen, da sie in der Wirklichkeit auch vorhanden sind und ihr Zustand deshalb berechenbar zu sein hat. Die Nichtberücksichtigung der Zusatzgleichungen mit negativem Gewicht spielt im Zusammenhang mit Seilnetzen natürlich keine Rolle, denn Druckkräfte können von Seilen nicht übertragen werden. Der Grund für die Nichtberücksichtigung von Gleichungen mit negativem Gewicht liegt in der besseren Kondition der Steifigkeitsmatrix. Damit wird die Berechnung von Gleichgewichtsfiguren, deren Brauchbarkeit vom Ingenieur beurteilt werden kann, erst möglich. Im Fall singulärer bzw. divergierender Gleichungssysteme dagegen ist die Beurteilung der Struktur nur schwer oder überhaupt nicht möglich; diese Fakten rechtfertigen das beschriebene Vorgehen.

6.2.3 Beispiel

Diese Erkenntnisse wollen wir im folgenden auf ein kleines Seilnetz anwenden. Das Seilnetz besteht aus 40 Seilstücken und 32 Knoten, davon sind 16 frei und 16 fest. Um die für Seilnetze notwendige doppelte Krümmung zu erzielen, werden 8 Punkte links und rechts als Hochpunkte und die anderen 8 oben und unten als Tiefpunkte ausgebildet.

6.2.3.1 Fehlerellipsoide

Nach einer Formfindung mit Kraftdichten sind wir in der Lage die ungedehnten Längen aller Seilstücke zu bestimmen und den Lastfall Vorspannung zu berechnen. Wir erhalten die dreidimensionale Gleichgewichtsfigur nach Abbildung 6.11. Auch in diesem Beispiel wollen wir die Fehlerellipsoide der Ausgleichsrechnung heranziehen, um mit ihrer Hilfe das Ergebnis zu interpretieren.

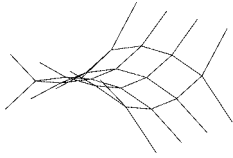


Abbildung 6.11: Vorgespanntes Seilnetz

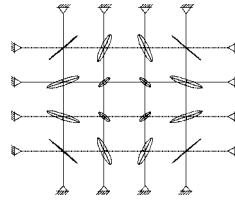


Abbildung 6.12: Lastfall Vorspannung

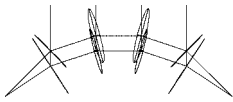


Abbildung 6.13: Lastfall Vorspannung

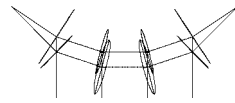


Abbildung 6.14: Lastfall Vorspannung

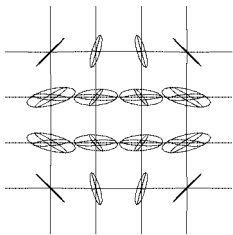


Abbildung 6.15: Lastfall Schnee

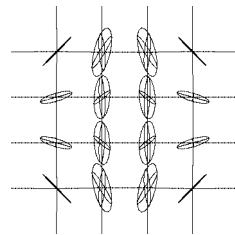


Abbildung 6.16: Lastfall Windsog

An diesen Abbildungen ist das Verhalten des Seilnetzes sehr gut zu erkennen. Im Grundriß beispielsweise ist die Verschieblichkeit der mittleren vier Punkte am geringsten, etc.. Um das prinzipielle Verhalten eines Seilnetzes zu demonstrieren, werden die Fehlerellipsen im Grundriß für den Lastfall Schnee und Windsog gezeigt. Aus diesem Grund werden die Begriffe Spann- und Trageile eingeführt. Die Spannseile laufen dabei von Tief- zu Tiefpunkt, in Abbildung 6.12 also von links nach rechts, die Trageile von Hoch- zu Hochpunkt, somit von unten nach oben. Im Lastfall Schnee werden die sogenannten Spannseile entlastet und die Trageile belastet. Die Abbildungen (6.12, 6.13 und 6.14) zeigen die Fehlerellipsoide im Grundriß und in zwei Aufrissen.

Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 6.15 sehr deutlich. Dort zeigen die Fehlerellipsen, daß die Punkte senkrecht zur Tragseilrichtung durch die entlasteten Spannseile nicht mehr so gut stabilisiert sind. Gerade umgekehrt ist das Verhalten für den Lastfall Windsog (Abb. 6.16). Der Windsog ist dabei gewissermaßen die negative Schneebelastung; d.h. die Tragseile werden hier entlastet und die Spannseile belastet und die Fehlerellipsen drehen sich somit um einen rechten Winkel.

6.2.3.2 Redundanzanteile

Auch an diesem Beispiel soll die klassische Abzählregel der dreidimensionalen Stabstatik herangezogen werden, um die statische Unbestimmtheit zu bestimmen. Dabei gilt im dreidimensionalen Fall $n = a + p - 3k$, wobei n die statische Unbestimmtheit, a die Anzahl der Auflagerreaktionen, p die Anzahl der Seilstücke und k die Anzahl aller Knotenpunkte darstellen. Wir erhalten also für das Beispiel eine statische Unbestimmtheit von -8 , da die Beziehung $-8 = 48 + 40 - 96$ angewendet wird. Für diesen Sachverhalt findet man in der Literatur mitunter die Bezeichnung 8-fach statisch überbestimmt bzw. 8-fach kinematisch. Diese Bezeichnungen werden für nicht vorgespannte Tragwerke beibehalten; für vorgespannte Seilnetze werden sie übernommen und erweitert. Für vorgespannte Systeme können folgende Regeln aufgestellt werden.

1. Das Ergebnis der Abzählregel wird - falls negativ - als statische Überbestimmtheit bezeichnet.
2. Die statische Überbestimmtheit ist die Differenz aus der kinematischen Unbestimmtheit und der statischen Unbestimmtheit.
3. Die kinematische Unbestimmtheit ist die Differenz aus der Summe der dreifachen Seilanzahl und der Summe der Redundanzanteile der geometrischen Steifigkeit.
4. Die statische Unbestimmtheit ist die Summe der Redundanzanteile der elastischen Steifigkeit.
5. Die Redundanz ist die Summe aus allen Redundanzanteilen bzw. die Anzahl der Fehlergleichungen minus die Anzahl der Unbekannten des Gleichungssystems. (Eine Redundanz größer gleich Null ist notwendig zur Lösung des Systems.)

Diese Sätze sollen nun an unserem Seilnetz verdeutlicht werden. Jedes vorgespannte Seil wird mit 4 Fehlergleichungen aufgebaut. Die Redundanz beträgt demnach $4 * 40 - 48 = 112$. Die Summe der Redundanzanteile der elastischen Steifigkeit beträgt 1.408, die Summe der Redundanzanteile der geometrischen Steifigkeit beträgt 110.592. Damit läßt sich die kinematische Unbestimmtheit des Seilnetzes angeben. Sie beträgt $120 - 110.952 = 9.408$. Wie kann man diese Zahl interpretieren? 120 Gleichungen werden zum Aufbau der geometrischen Steifigkeit herangezogen. Von diesen 120 Anteilen werden 110.592 Anteile zur Kontrolle der Gleichungen benötigt, die restlichen 9.408 Anteile zur Bestimmung der unbekanntenen Koordinaten verbraucht. Da diese Gleichungen die geometrische Steifigkeit betreffen, besitzt dieses Tragwerk 9.408 kinematische Freiheitsgrade. Die Summe der Redundanzanteile der elastischen Steifigkeitgleichungen beträgt 1.408. Damit ergibt sich die Überbestimmtheit des Systemes zu $9.408 - 1.408 = 8$. Der aufmerksame Leser wird der Tatsache, daß die Summe der elastischen Redundanzanteile größer als 1 ist, die Bedeutung beimessen, daß ein Seilelement eliminiert werden kann. Dies ist hier auf keinen Fall zulässig, denn die elastische Redundanz von 1 wird durch die aufgebrachte Vorspannung gewissermaßen aufgezehrt. Die Ausmagerung derjenigen Elemente ist nicht erlaubt, deren Redundanzanteile anzeigen, daß geometrische Steifigkeit zur Beseitigung der kinematischen Freiheitsgrade benötigt wird; die Fähigkeit geometrische Steifigkeit aufzubauen, ginge mit der Elimination des Elementes verloren.

Die Bedeutung der Redundanzanteile bei Seilnetzen liegt nun darin, die statische und kinematische Unbestimmtheit zu ermitteln. Die statische Unbestimmtheit z.B. gibt Aufschluß über die Vorspannzustände. So erkennt man an einer statischen Unbestimmtheit von 1, die sehr häufig bei Seilnetzen auftritt, daß die möglichen Vorspannzustände nur von einem variablen Faktor α und einem konstanten

Vektor \underline{c} abhängen. Es gilt für die Vorspannkräfte \underline{s}_v in den Seilstücken also

$$\underline{s}_v = \alpha \underline{c} = \alpha \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (6.66)$$

Im Falle einer höheren statischen Unbestimmtheit gibt es eine der statischen Unbestimmtheit entsprechende Anzahl von Vektoren \underline{c} . Also im Falle von k statischen Unbestimmtheiten

$$\underline{s}_v = \alpha_1 \underline{c}_1 + \alpha_2 \underline{c}_2 + \dots + \alpha_k \underline{c}_k. \quad (6.67)$$

Einen Vorspannzustand zu finden, der für das Tragwerk geeignet ist, ist für den Fall der einfachen statischen Unbestimmtheit am einfachsten; hier ist lediglich eine Variable (α) nach Gleichung (6.66) zur Ermittlung einer günstigen Vorspannung zu variieren.

Aber auch die Größe der Redundanzanteile gibt Aufschluß z.B. in bezug auf Fertigungsgenauigkeiten. So sind Seile mit hohen elastischen Redundanzanteilen sehr genau zu fertigen, denn Imperfektionen werden bei diesen Elementen starke Kraftänderungen verursachen. Im Gegensatz dazu stehen Seilelemente mit einem geringeren elastischen Redundanzanteil; bei ihnen führen Imperfektionen zu nahezu dehnungslosen Verformungen.

Um das Wissen über die Redundanzanteile auch bei Problemen der geodätischen Netzberechnung zu verstehen, wird ein Beispiel aus der Streckennetzausgleichung herangezogen. Streckennetzausgleichung ist in diesem Zusammenhang fast übertrieben; es handelt sich um einen sogenannten Bogenschnitt. Von zwei Festpunkten A und E aus wird ein Neupunkt M durch die Messung zweier Strecken (AM) und (EM) koordiniert. Aufgrund der Tatsache, daß der Neupunkt praktisch auf der Verbindungslinie zwischen den Festpunkten liegt, ist die Summe der Streckenmessungen zufällig kleiner als der Abstand (AE).

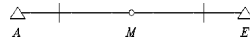


Abbildung 6.17: Geodätisches Streckennetz bzw. Bogenschnitt

Auf dieses kleine Problem wenden wir nun die vermittelnde Streckennetzausgleichung an. Wir erleben eine Enttäuschung, denn das Problem erweist sich als singular. Die Mitnahme von zweiten Ableitungen schafft Abhilfe. Man erhält das Ergebnis, das man auch erwarten darf. Der Neupunkt liegt auf der Verbindungslinie und die beiden positiven Verbesserungen minimieren das Potential. Wie sehen in diesem Fall die Redundanzanteile der Verbindungen aus? Die elastischen Anteile der beiden Beobachtungen betragen jeweils 0.5, die geometrischen jeweils 2.5, d.h., daß 1 kinematischer Freiheitsgrad vorhanden ist ($2 * 3 - 2 * 2.5 = 1$). Das Ergebnis der klassischen Abzählregel, so wie man es auch in der Geodäsie anwendet, ist bei diesem Problem natürlich Null, denn zwei Strecken dienen zur Bestimmung zweier Koordinaten. Die Differenz aus kinematischer und statischer Redundanz ergibt als klassische Gesamtredundanz ebenso Null. Die Besonderheit ist darauf zurückzuführen, daß ein Problem mit der Redundanz Null Verbesserungen bekommt, weil die Beobachtungen zufällig oder beabsichtigt zu klein ausfallen.

6.3 Platten

6.3.1 Zur linearen Theorie dünner Platten

Wir betrachten eine dünne Platte konstanter Dicke h , deren Mittelebene mit der (x, y) -Ebene zusammenfallen soll; siehe dazu z.B. [79], [30], [93], [6]. Definitionsgemäß wird die Platte durch vertikale

Lasten, die also senkrecht zur Mittelebene stehen, belastet. Die Lasten können dabei punkt-, linien- oder flächenförmig auftreten.

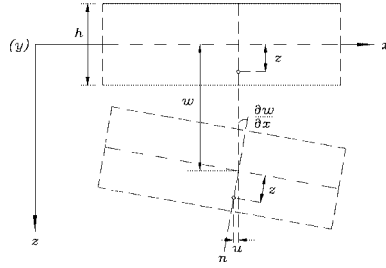


Abbildung 6.18: Verformung einer dünnen Platte

Aufgrund der Kirchhoffschen Hypothesen für dünne Platten wird angenommen, daß die Punkte auf einer Normalem zur Mittelfläche auch im verformten Zustand auf einer Geraden liegen, die senkrecht auf der verformten Mittelfläche steht [30], [80]. [10], [6]. Sind weiterhin die Durchbiegungen klein gegenüber ihrer Dicke, dann können die in der Mittelfläche auftretenden Dehnungen und Winkeländerungen vernachlässigt werden. Die Mittelfläche bleibt somit unverzerrt. Ein Punkt auf der Mittelfläche mit den Koordinaten $(x, y, 0)$ erfährt in z -Richtung eine Verschiebung w . Unter diesen Voraussetzungen werden die Verschiebungskomponenten u , v und w , die sich in x , y und z -Richtung des übergeordneten Systems (x, y, z) erstrecken und im allgemeinen Funktionen des Ortes sind, wie folgt ergeben

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Nach der Gleichung (3.11) ergeben sich folgende Verzerrungskomponenten

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Die drei verbleibenden Verzerrungskomponenten verschwinden identisch Null. Weiterhin werden Spannungen normal zur Mittelfläche vernachlässigt, d.h. $\sigma_z = 0$. Diese Gleichungen sorgen für einen ebenen Spannungszustand. Im folgenden wird das allgemeine Hookesche Gesetz nach Gleichung (3.17) auf diesen ebenen Spannungszustand angewendet. Aus dem Hookeschen Gesetz, es lautet

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{D}^{-1} \underline{\sigma}, \quad (6.70)$$

erhält man im ebenen Spannungszustand folglich

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ergibt für diesen ebenen Spannungszustand also $\underline{\sigma} = D_S^{-1} \underline{\varepsilon}$. Ausführlich geschrieben also

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Der Vollständigkeit halber wird darauf hingewiesen, daß dieser ebene Spannungszustand im Gegensatz zum ebenen Verzerrungszustand, d.h. $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ zu verstehen ist. Die Matrix D_V des ebenen Verzerrungszustand ist durch Streichen der Zeilen und Spalten 3, 5 und 6 in der Matrix D von Gleichung (3.17) zu erhalten.

Nach diesem Exkurs wollen wir uns wieder der Plattenbiegung zuwenden. Dort ist es üblich, anstelle der Spannungskomponenten auf die Einheit der Schnittlängen bezogene Schnittmomente und -kräfte einzuführen. Zwischen den Spannungen und den Schnittgrößen bestehen nachfolgende Beziehungen: für die Schnittmomente

$$m_x = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_x z \, dz, \quad m_y = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_y z \, dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \tau_{xy} z \, dz \quad (6.73)$$

und für die Schnittkräfte

$$q_x = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \tau_{xz} \, dz, \quad q_y = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \tau_{yz} \, dz. \quad (6.74)$$

Die innere Energie ist bekanntlich $\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} \, dV$. Sämtliche Größen zur Berechnung des Potential der inneren Kräfte sind bekannt; nach Ausführung der Integration in z -Richtung erhalten wir das Oberflächenintegral

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \int_O \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (6.75)$$

Dabei wird der Koeffizient $K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ als Plattensteifigkeit bezeichnet. Dies versetzt uns in die Lage die Schnittmomente nach Gleichung (6.73) sehr viel kompakter auszudrücken, und zwar

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad m_{xy} = -(1-\mu)K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.76)$$

Die sogenannte Momentensumme M lautet

$$M = \frac{m_x + m_y}{1 + \mu}. \quad (6.77)$$

Das Potential der äußeren Lasten, die senkrecht zur Platte wirken, lautet mit der ortsabhängigen Flächenlast p_o und den Einzelkräften p_e

$$\Pi_a = \int_O p_o(x, y) dx dy + \sum p_e w. \quad (6.78)$$

Das Prinzip der minimalen Gesamtenergie Π wird auch hier angewendet, d.h.

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a \Rightarrow \text{Minimum}. \quad (6.79)$$

6.3.2 Zur Diskretisierung mit einem einfachen Dreieckselement

Nun wollen wir konkreter werden und unser Gebiet, über welches integriert werden muß, in finite Dreieckselemente zerlegen. Jedem Dreieck werden sechs Freiheitsgrade zugeordnet. Dabei werden folgende Knotenvariablen definiert.

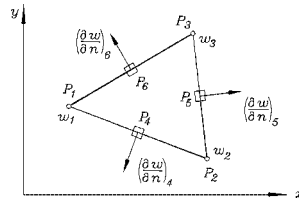


Abbildung 6.19: Einfaches finites Plattenelement mit sechs Freiheitsgraden

Die Funktionswerte w_1, w_2 und w_3 in den Eckpunkten und die Werte der Normalableitungen $(\frac{\partial w}{\partial n})_4$, $(\frac{\partial w}{\partial n})_5$ und $(\frac{\partial w}{\partial n})_6$ in den Seitenmitten. Die Anforderungen an die Stetigkeit sind bei diesem Element - es wird als nichtkonformes Morleysches Plattenelement bezeichnet - weitgehend gelockert. So ist die Stetigkeit in den Durchbiegungen nur in den drei Eckpunkten und die Stetigkeit der Ableitungen der Durchbiegungen nur in den Seitenmitten, und zwar normal zur Dreiecksseite, eingehalten. Da das Element sechs Freiheitsgrade aufweist, bietet sich für die Durchbiegungen w ein vollständiges Polynom zweiten Grades an.

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (6.80)$$

Wir benötigen zur Darstellung der inneren Energie die ersten Ableitungen der Durchbiegung nach den Ortskoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y, \end{aligned} \quad (6.81)$$

um die zweiten berechnen zu können, also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\alpha_4, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\alpha_6, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_5. \quad (6.82)$$

Wir erkennen, daß die zweiten Ableitungen konstant sind. Deshalb ist die Integration nach Gleichung (6.75) sehr einfach; wir erhalten das Potential der inneren Energie für alle Dreieckselemente mit dem Flächeninhalt A zu

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \sum AK \left(4\alpha_4^2 + 4\alpha_6^2 + 8\mu \alpha_4 \alpha_6 + 2(1 - \mu)\alpha_5^2 \right). \quad (6.83)$$

In jedem der Zwischenpunkte 4, 5 und 6 wird ein lokales Koordinatensystem n, t eingeführt, das mit dem globalen (x, y) -System in folgender Beziehung steht

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}, \quad (6.84)$$

wobei β der Winkel zwischen der x - und n -Achse darstellt. Die t -Achse fällt jeweils mit der Verbindungslinie zweier Dreieckspunkte zusammen und die n -Achse steht senkrecht darauf. Für die Normalableitung gilt ganz allgemein

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \beta. \quad (6.85)$$

Faßt man nun die unbekanntnen Knotenvariablen zu einem Vektor \underline{w} und die Polynomkoeffizienten zum Vektor $\underline{\alpha}$ zusammen, ergibt sich der Zusammenhang $\underline{w} = S\underline{\alpha}$. Explizit demnach

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_4 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_5 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \\ 0 & c_4 & s_4 & 2c_4 x_4 & s_4 x_4 + c_4 y_4 & 2s_4 y_4 \\ 0 & c_5 & s_5 & 2c_5 x_5 & s_5 x_5 + c_5 y_5 & 2s_5 y_5 \\ 0 & c_6 & s_6 & 2c_6 x_6 & s_6 x_6 + c_6 y_6 & 2s_6 y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}. \quad (6.86)$$

Dabei bedeuten $c_j = \cos \beta_j$ und $s_j = \sin \beta_j$, wobei β_j der Winkel zwischen der positiven x -Achse und der Normalen n im Punkt P_j darstellt. Wenn das Dreieck nicht (zur Linie) entartet, d.h. einen positiven Flächeninhalt besitzt, gibt es eine zu S inverse Matrix T . Es gilt also $\underline{\alpha} = T\underline{w}$, oder ausführlich

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

Nun können pro Dreieckselement 3 Verbesserungsgleichungen definiert werden, und zwar

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_4 + \alpha_6 & p_1 &= 2KA(1 + \mu) \\ v_2 &= \alpha_4 - \alpha_6 & p_2 &= 2KA(1 - \mu) \\ v_3 &= \alpha_5 & p_3 &= 2KA(1 - \mu). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Aus diesen Verbesserungen und Gewichten ergibt sich das Potential

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \sum (v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + v_3^2 p_3). \quad (6.89)$$

Durch Nachrechnen kann man sich leicht überzeugen, daß die Potentialwerte nach Gleichung (6.83) und Gleichung (6.89) identisch sind.

Hier hängen die unbekanntenen Verbesserungen linear von den unbekanntenen Knotenvariablen des Vektors \underline{w} ab. Wir wollen diesen Zusammenhang ganz genau zeigen und schreiben für die Verbesserungen

$$\begin{aligned} v_1 &= (t_{41} + t_{61}) w_1 + (t_{42} + t_{62}) w_2 + (t_{43} + t_{63}) w_3 + \\ &\quad (t_{44} + t_{64}) w'_1 + (t_{45} + t_{65}) w'_2 + (t_{46} + t_{66}) w'_3 \\ v_2 &= (t_{42} - t_{61}) w_1 + (t_{42} - t_{62}) w_2 + (t_{43} - t_{63}) w_3 + \\ &\quad (t_{44} - t_{64}) w'_1 + (t_{45} - t_{65}) w'_2 + (t_{46} - t_{66}) w'_3 \\ v_3 &= \quad t_{51} \quad w_1 + \quad t_{52} \quad w_2 + \quad t_{53} \quad w_3 + \\ &\quad t_{54} \quad w'_1 + \quad t_{55} \quad w'_2 + \quad t_{55} \quad w'_3. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Wir wollen nun noch voraussetzen, daß es gelungen ist, in Abhängigkeit von der Art der Flächenbelastung die sogenannten Ersatzknotenlasten \underline{p} - Kräfte in den Dreieckspunkten und Momente in den Seitenmitten - zu ermitteln, dann kann die Plattenberechnung als vollkommen analog zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen berechnet werden. Die uns bekannten Gleichungen der linearen Theorie gelten in diesem Fall. Die Verbesserungen kommen hier allerdings nicht durch Imperfektionen zustande, sondern sind eine Folge der äußeren Lasten. Es gilt, wenn in der Diagonalmatrix \mathbf{P} die Beobachtungsgewichte zusammengefaßt sind und der Vektor \underline{w}_g alle Unbekannten enthält

$$\mathbf{T}^t \mathbf{P} \mathbf{T} \underline{w}_g = \underline{p}. \quad (6.91)$$

Nach der Berechnung der Unbekannten sind die Größen abzuleiten, die von eigentlichem Interesse sind; die Schnittgrößen nach Gleichung (6.73); für unser Plattenelement erhält man - nachdem die Polynomkoeffizienten $\underline{\alpha}$ bestimmt sind - für die Schnittmomente

$$m_x = -2K(\alpha_4 + \mu \alpha_6), \quad m_y = -2K(\alpha_6 + \mu \alpha_4), \quad m_{xy} = -(1 - \mu)K\alpha_5. \quad (6.92)$$

6.3.3 Beispiel

Im folgenden werden die Ergebnisse der Plattenberechnung mit dem Morleyschen Plattenelement mit Hilfe eines Beispielles vorgestellt.

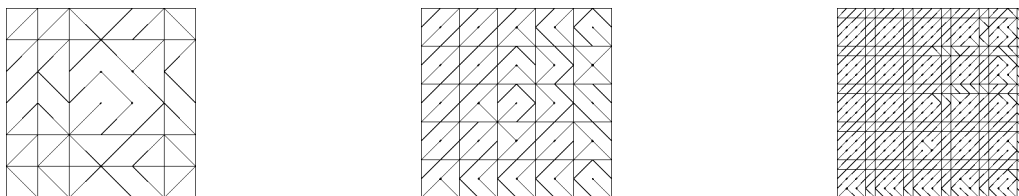


Abbildung 6.20: Drei verschiedene Diskretisierungsgrade (grob, mittel, fein)

Eine quadratische Platte mit $a=5\text{m}$ Seitenlänge und der konstanten Dicke von $h=0.2\text{m}$ ist allseitig frei drehbar gelagert. Sie besitzt einen Elastizitätsmodul von $E=20000000 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$ und eine Querdehnzahl $\mu = 0$. Die Platte wird mit gleichförmig verteilter Vollbelastung von $p = 20 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$ belastet. Die Ergebnisse einer exakten Berechnung liegen vor. Man erhält für die maximalen Momente in Feldmitte, die natürlich identisch in beide Richtungen sind, $m_x = m_y = 0.0368pa^2$, für die Zugkräfte in den vier Eckpunkten $A = 0.0849pa^2$ und für die Durchbiegung in Feldmitte $w_m = 0.00406 \frac{pa^4}{K}$, wobei K die Plattensteifigkeit darstellt.

	Diskretisierungsgrad			exakte Werte
	grob	mittel	fein	
$m_x = m_y [\text{KNm/m}]$	8.95 3%	9.12 1 %	9.18 0%	9.20
$w_m [\text{mm}]$	2.07 9%	1.96 3%	1.92 1%	1.90
$A [\text{KN}]$	19.50 8%	21.66 2%	22.75 7%	21.23

Tabelle 6.6: Abweichungen der Diskretisierungen vom exakten Ergebnis in Prozent

Diese Platte wurde mit verschiedenen Diskretisierungsgraden gerechnet, die zukünftig als grob, mittel und fein bezeichnet werden. Die grobe Einteilung zerlegt das Quadrat in 72, die mittlere in 200 und die feine in 800 einzelne Dreiecke (siehe Abb.6.20).

Die Ergebnisse der Berechnung werden in Tabellenform angegeben, wobei die Abweichungen der Resultate von den wahren Werten in Klammern angegeben sind. (Tab. 6.6)

Durch Abbildungen 6.21-6.26 sollen die Ergebnisse veranschaulicht werden.

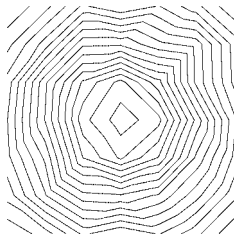


Abbildung 6.21: Höhenlinien der Momentensumme (grob)

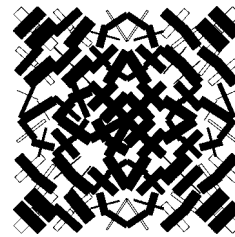


Abbildung 6.22: Hauptspannungsrichtungen (grob)

Die Abbildungen 6.22, 6.24 und 6.26 zeigen die Hauptmomentenrichtungen. Die positiven Hauptmomente (schwarz) erzeugen dabei Zug auf der Plattenunterseite und die negativen Hauptmomente (weiß) Zug auf der Plattenoberseite. Die Isoliniendarstellungen (Abb.6.21, 6.23 und 6.25) zeigen die Momentensummen, die als Höhe über der Platte abgetragen sind. An der Tabelle 6.6 zeigt sich die grundsätzliche Verbesserung der Resultate mit zunehmender Verfeinerung.

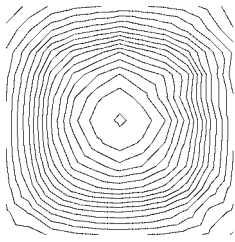


Abbildung 6.23: Höhenlinien der Momentensumme (mittel)

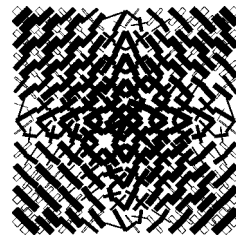


Abbildung 6.24: Hauptspannungsrichtungen (mittel)

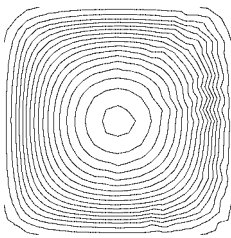


Abbildung 6.25: Höhenlinien der Momentensumme (fein)

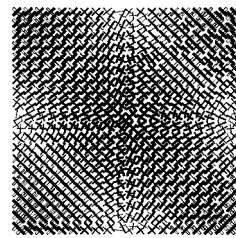


Abbildung 6.26: Hauptspannungsrichtungen (fein)

6.4 Minimalflächen unter Innendruck

6.4.1 Zur Bedeutung von Minimalflächen

Zunächst wird die Bedeutung von Minimalflächen im Bauwesen beleuchtet, um den Grund für die Berechnung innendruckbelasteter Minimalflächen, also ganz bestimmter pneumatischer Konstruktionen, zu verdeutlichen. Minimalflächen sind mathematisch als Flächen definiert, die einen gegebenen und geschlossenen Rand mit minimaler Oberfläche überspannen [70]. Die mechanische Bedeutung dieser Flächen ist bemerkenswert, denn sie besitzen in jedem Punkt identische Spannungen, d.h., daß sie bei Vorliegen eines isotropen Werkstoffes mit minimalem Materialaufwand realisiert werden können. In diesem Prinzip der Materialmimimierung (Leichtbau) liegt die Bedeutung der Minimalflächen [9], [102]. Seifenhäute innerhalb eines Drahtrahmens etwa sind in sehr guter Näherung Minimalflächen; auch heute werden noch Seifenhautmodelle zur Bestimmung der Oberflächengeometrie herangezogen. Sehr viel flexibler sind natürlich Computermodelle; z.B. hinsichtlich der Randausbildung, die nicht starr sein muß, aber auch in bezug auf äußere Lasten, die ganz beliebig aufgebracht werden können. Die wesentlichen Bestandteile pneumatischer Gebilde sind Hülle und Füllung dieser durch Flüssigkeiten oder Gase. Durch die Befüllung wird die Hülle mit Hilfe des Innendruckes pneumatisch gespannt; sie ist nun in der Lage, äußere Lasten aufzunehmen; ein pneumatisches Tragwerk ist entstanden. Die

Berechnung von Minimalflächen unter Innendruck und beliebigen Randbedingungen ist natürlich nur im Computer möglich. Darunter fällt z.B. die Beachtung des Gasgesetzes nach Boyle-Mariotte [29]. Ersetzt man die Minimalfläche Seifenhaut durch eine (seilnetzverstärkte) Membran, so können mit der nachfolgend angegebenen Theorie z.B. Traglufthallen [77] berechnet werden. Sehr viel ausführlicher nimmt Singer dazu Stellung [95].

6.4.2 Zur Theorie von Minimalflächen unter Innendruck

Nun soll das mathematische Modell - Minimalfläche unter Innendruck - angegeben werden. Das Potential der inneren Kräfte, also die Formänderungsenergie, ist sehr einfach durch die mit der Oberflächenspannung zu multiplizierende Fläche gegeben. Das Potential des Innendruckes ist nichts anderes als das Produkt aus Innendruck und Volumen der Hüllfläche. Dabei wollen wir annehmen, daß die Hülle einen geschlossenen Körper bildet. Das Gesamtpotential lautet unter diesen Voraussetzungen

$$\Pi_M = \frac{1}{2}F\sigma - pV \Rightarrow \text{stat..} \quad (6.93)$$

Dabei ist F die Oberfläche, σ die Oberflächenspannung, p der Innendruck und V das Volumen des Körpers.

Nach diesen sehr allgemeinen Ausführungen werden wir konkreter. Die Oberfläche der Hülle wird hier durch eine Dreiecksfacettenfläche mit den Koordinaten aller Punkte beschrieben. Der Inhalt der Gesamtoberfläche wird definiert als die Summe aller ebenen Dreiecksflächen. Jeder Dreiecksfläche ist die Spannung σ zugeordnet. Das Volumen des Körpers wird durch die Summe aller Tetraeder gebildet, welche die Dreiecke mit dem Koordinatenursprung bilden, d.h. die vier Punkte des Tetraders sind der Koordinatenursprung und jeweils drei Punkte einer Dreiecksfläche. Es ist zu beachten, daß die Dreieckspunkte identischen Umlaufsinn besitzen, also z.B. rechtsherum, wenn von außen auf die Fläche geschaut wird. Mit unseren Ansätzen gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Methoden, pneumatische Konstruktionen zu berechnen. Entweder durch Aufbringen des Innendruckes, welcher ein bestimmtes Volumen erzeugt oder durch Vorgabe eines Volumens, für welches sich ein Innendruck einzustellen hat. Wir entscheiden uns für die zweite Variante, denn es wird sich herausstellen, daß dann das Potential eine uns bekannte Form annimmt, d.h. mit der Grundgleichung der Ausgleichsrechnung formuliert werden kann. Die innere Energie wird in der Ausgleichsrechnung als gewogene Quadratsumme von Verbesserungen dargestellt. Aus diesem Grund wird die Quadratwurzel der Oberfläche eines Dreieckselementes als Verbesserung gewissermaßen quadriert und mit dem Gewicht Oberflächenspannung multipliziert. Die innere Energie lautet somit

$$\Pi_{iM} = \frac{1}{2}F\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m F_i \sigma_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sqrt{F_i} \sqrt{F_i} \sigma_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m f_i f_i \sigma_i = \frac{1}{2}\underline{f}^t \underline{\Sigma} \underline{f}, \quad (6.94)$$

wobei m die Anzahl der Dreieckselemente und $\underline{\Sigma}$ eine Diagonalmatrix mit den Oberflächenspannungen auf der Hauptdiagonalen ist; bei einer Minimalflächenberechnung sind natürlich alle Hauptdiagonalelemente identisch. Der Vektor \underline{f} beinhaltet die Quadratwurzeln aus den Dreiecksflächen und ist damit eine Funktion der Koordinaten der Dreieckspunkte, die - abgesehen von einigen Festpunkten - unbekannt sind.

Das Potential des Innendruckes p wird um eine Konstante K erweitert. Dies ist immer möglich, denn letztlich ist keineswegs der Absolutwert des Potentials von Bedeutung, sondern lediglich sein Stationaritätspunkt. Diese Konstante wird dann für unsere Zwecke günstig substituiert. Damit ergibt sich das Innendruckpotential zu

$$\Pi_{pM} = pV + K = p\sum_{i=1}^m V_i + K = p\sum_{i=1}^m V_i - pV_0 = p\left(\sum_{i=1}^m V_i - V_0\right) = p(V - V_0). \quad (6.95)$$

Das Volumen V_0 ist als bekanntes Vorgabevolumen zu verstehen. Mit diesem Volumen wird sich ein bestimmter Innendruck p einstellen.

Das Gesamtpotential hängt also von den unbekanntenen Koordinaten \underline{x} und dem unbekanntenen Innendruck p ab. Es lautet mit dem Potential Π_l von weiteren äußeren Lasten \underline{p} (nicht zu verwechseln mit dem Innendruck p)

$$\Pi_M(\underline{x}, p) = \Pi_{i_M} - \Pi_{p_M} - \Pi_l = \frac{1}{2} \underline{f}(\underline{x})^t \underline{\Sigma} \underline{f}(\underline{x}) - p(V(\underline{x}) - V_0) - \underline{p} \underline{x} \Rightarrow \text{stat.} \quad (6.96)$$

Der in der Ausgleichsrechnung geübte Leser wird hier sofort das Ausgleichsprinzip der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten erkennen. Die Quadratwurzel aus der Dreiecksfläche entspricht den Verbesserungen \underline{v} , die Gewichtsmatrix \mathbf{P} der Ausgleichsrechnung ist hier $\underline{\Sigma}$, die Bedingungsgleichung ist das aus den unbekanntenen Koordinaten \underline{x} berechnete Volumen abzüglich des Vorgabevolumens, der Lagrangemultiplikator p wird in der Ausgleichsrechnung üblicherweise als Korrelate bezeichnet. Im allgemeinen Ausgleichskonzept sind willkürliche Konstanten \underline{p} eingeführt worden; das Analogon auf der mechanischen Seite sind die äußeren Lasten. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_M}{\partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{\Sigma} \underline{f}(\underline{x}) - \left(\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t p = \underline{p} \\ \frac{\partial \Pi_M}{\partial p} &= - (V(\underline{x}) - V_0) = \underline{0}. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Die nichtlinearen Gleichungen nach (6.97) werden wie üblich an den Rohwerten linearisiert. Für die unbekanntenen Zuschlagsvektoren $\underline{\Delta x}$ und das Inkrement des Innendrucks Δp erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} & \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \underline{x} \partial p} \\ \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \underline{x} \partial p} & \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p \partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta x} \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Pi_M}{\partial \underline{x}} \\ -\frac{\partial \Pi_M}{\partial p} \end{bmatrix}. \quad (6.98)$$

Die für unseren Fall sich ergebenden Matrizen lauten wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} &= \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t \underline{\Sigma} \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} - \frac{\partial^2 V(\underline{x})}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} p = \mathbf{A}^t \underline{\Sigma} \mathbf{A} + \mathbf{Z} \\ \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \underline{x} \partial p} &= - \left(\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right)^t = -\mathbf{C} \\ \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p \partial \underline{x}} &= - \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = -\mathbf{C}^t \\ \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p \partial p} &= 0. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Unter der Annahme, daß die Rohwerte \underline{x}_{j-1} und p_{j-1} aus der Iteration $j-1$ für die Unbekannten vorhanden sind, ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \underline{\Sigma} \mathbf{A} + \mathbf{Z} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta x}_j \\ \Delta p_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} p_{j-1} - \mathbf{A}^t \underline{\Sigma} \underline{f}_{j-1} \\ V(\underline{x}_{j-1}) - V_0 \end{bmatrix}. \quad (6.100)$$

Die Inkremente für die Unbekannten $\underline{\Delta x}_j$ und Δp_j werden - ausgehend von Näherungswerten \underline{x}_j und p_j - solange erneut bestimmt, bis sie oder die rechte Seite des obigen Systems ein Abbruchkriterium unterschreiten.

6.4.3 Beispiel

Auch hier soll nicht versäumt werden, ein Beispiel zu zeigen, das die Güte des gewählten Ansatzes auch im Hinblick auf Näherungswerte unterstreicht. Zu diesem Zweck wird ein Zylinder auf den oben und unten eine Halbkugel aufgesetzt wird, erzeugt. Sämtliche Vierecksmaschen des Zylinders werden durch je vier Dreiecke vermascht. Wir überziehen die Oberfläche dieser Struktur also zweifach. Durch diese Maßnahme wollen wir die Symmetrieeigenschaften des Körpers erhalten. Die Abmessungen dieser Hülle betragen: Zylinderlänge 6m und Radius 3m, was ein Volumen von 548.9m^3 ergibt. Dieser Körper soll nun die Näherungsgeometrie bilden für eine Minimalflächenberechnung unter Innendruck. Wir geben dabei die Matrix Σ der Oberflächenspannungen vor. Alle Diagonalelemente - und nur solche sind vorhanden - sind identisch, und zwar 50KN/m . Weiterhin soll der Pneu das Vorgabevolumen 1250m^3 besitzen; dies ist mehr als das doppelte des Volumens, welches die Ausgangsgeometrie aufweist.

Nach 9 Iterationen ist das Vorgabevolumen und das Gleichgewicht in jedem Punkt bis auf vernachlässigbare Residuenkräfte eingehalten. Das Ergebnis der Berechnungen sind die Koordinaten aller Punkte, sowie der Innendruck von 15.04KN/m^2 .

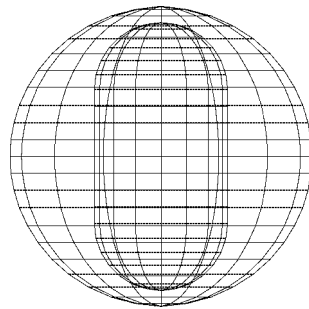


Abbildung 6.27: Ausgangs- und Endlage

	Volumen [m ³]	Membranspannung [KN/m]	Radius [m]	Innendruck [KN/m ²]
exakt	1250.0	50.0	6.68	14.96
berechnet	1250.0	50.0	6.74 ± 0.04 0.9%	15.04 0.5%

Tabelle 6.7: Vergleich der exakten und der berechneten Werte

Mit diesen Erkenntnissen werden wir die Güte der Resultate ermitteln können, denn die wahre Lösung für unser Problem liegt vor. Im schwerelosen Zustand ist die freie Blase eine exakte Kugel. Ist der Innendruck p und der Radius r , so ist die Membranspannung an jedem Punkt und in jede Richtung

$$\sigma = \frac{1}{2}pr. \quad (6.101)$$

Wir vergleichen dies mit unseren Resultaten, wobei wir annehmen, daß jeweils die Membranspannungen und das Volumen gegeben sind. Anhand der Tabelle (6.7) können die Ergebnisse beurteilt werden; die Unterschiede zwischen den wahren Werten und den berechneten sind sehr einfach zu erklären. Durch die Vorgabe des Volumens sind wahres und berechnetes Volumen identisch; dies fordert ja die Bedingungs-gleichung. Die Membranspannungen sind ebenfalls identisch. Damit kann aber der Radius und der mit dem Radius korrelierte Innendruck nicht gleich sein, denn eine Dreiecksfacettenfläche mit Volumen der exakten Kugel benötigt einen größeren Radius, der dann einen höheren Innendruck erfordert.

Die Anzahl der Punkte (338) und der Dreiecke (1344) läßt den Aufwand der zu verwaltenden Daten erahnen. Die Größe des Gleichungssystemes ist die dreifache Anzahl der Knoten zuzüglich des unbekanntes Innendruckes, also 1015; es ergeben sich mit dem Hypersparsealgorithmus 55999 Elemente in der Steifigkeitsmatrix, die damit zu ca. 11% besetzt ist.

6.5 Stabtragwerke

Bevor wir uns mit den Stabtragwerken beschäftigen, wollen wir eine kurze Definition des Begriffs Stabtragwerk geben. Die Elemente (Kanten) des Stabtragwerkes sind die Stäbe; sie werden in den Stabenden (Knoten) miteinander verknüpft. Hier wollen wir voraussetzen, daß nur die Knoten durch äußere Kräfte und Momente belastet werden. Im übrigen gilt folgendes:

1. Das Stabwerk ist linear elastisch.
2. Der Werkstoff ist homogen und isotrop.
3. Die Stabachsen sind gerade und besitzen konstanten Querschnitt.
4. Die Querschnittsachsen sind Hauptachsen und die Stabachse liegt im Schubmittelpunkt des Querschnittes.

Der grundsätzliche Unterschied von Stabtrag- und Fachwerken besteht darin, daß die Elemente der Stabtragwerke nicht nur Normalkräfte, also Zug und Druck, sondern auch Biegemomente, die daraus resultierenden Querkkräfte und Torsionsmomente übertragen können.

Die Bedeutung von Stabtragwerken für das Bauwesen ist enorm, denn sämtliche Tragwerke mit linienhafter Tragwirkung sind letztlich Stabtragwerke. So gesehen sind auch Fachwerke spezielle Stabtragwerke. Sie werden nach der Anordnung der Knoten, nach der Art der Belastung, etc. in eine Vielzahl von Typen eingeteilt. Insbesondere unterscheidet man räumliche und ebene Stabwerke. Bei ebenen Tragwerken wird davon ausgegangen, daß alle Knoten und alle äußeren Kräfte in einer Ebene liegen; der Momentenvektor steht senkrecht dazu, sodaß die durch die äußeren Momente bewirkten Verdrehungen in eben dieser Ebene liegen. Dieses zweidimensionale Element ist in der Lage eine Normalkraft, ein Biegemoment und eine Querkraft weiterzuleiten. Dagegen ist das allgemeine dreidimensionale Stabelement fähig, zwei Biegemomente mit den dazugehörigen Querkkräften, eine Normalkraft und ein Torsionsmoment zu übertragen.

Damit die Berechnung von dreidimensionalen Stabtragwerken mit dem allgemeinen Ausgleichungsansatz möglich wird, ist es notwendig, die innere Energie, d.h. die Formänderungsenergie eines Stabelementes als gewogenes Quadrat von Verbesserungen, das entspricht elastischen Änderungen, auszudrücken. Für den Fall der Normalkraft wurde dies bereits in dem Abschnitt über die Fachwerke getan. Hier nun wird zuerst die Biege- und dann die Torsionsenergie eines Stabes als Quadrat von Verbesserungen formuliert, wobei diese Verbesserungen als Funktion der Knotenvariablen ausgedrückt werden.

6.5.1 Formänderungsenergie eines Stabelements infolge Biegung

In der klassischen Balkentheorie (Euler-Bernoulli) wird angenommen, daß bei Biegung in einer Haupt-richtung ebene Querschnitte eben bleiben.

Betrachtet man einen ebenen Balken mit konstantem Querschnitt und Biegung in der (x, z) -Ebene unter der schon genannten Annahme, daß Auslenkungen und Neigungen klein sind und sich die Punkte der neutralen x -Achse nur parallel zur z -Achse verschieben, so ist die Verschiebungskomponente $u(x, y, z)$ in x -Richtung näherungsweise darstellbar als Neigung der Biegelinie $w(x)$ (siehe Abbildung 6.28)

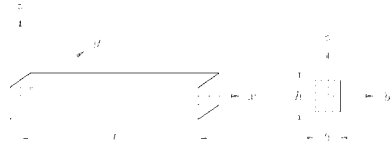


Abbildung 6.28: Biegebalken

$$u(x, y, z) = -zw'(x). \quad (6.102)$$

Die Verschiebungskomponente in z -Richtung eines beliebigen Punktes des Schnittes kann aus demselben Grund gleich $w(x)$ gesetzt werden. Voraussetzungsgemäß soll die Biegung nur in der (x, z) -Ebene erfolgen, was zur Folge hat, daß die v -Komponente der Verschiebung zu Null wird. Bei der Bildung des Verzerrungsvektors stellt sich nunmehr heraus, daß nur die Dehnung in x -Richtung von Null verschieden ist. Die dritte Komponente der Schubverzerrung lautet nach Gleichung (3.11)

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w' - w' = 0 \quad (6.103)$$

verschwindet ebenso. Bei der Balkenbiegung sind weiterhin die Normalspannungen σ_y und σ_z identisch Null, so daß nach Gleichung (3.17) lediglich die Spannungskomponente

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (6.104)$$

verbleibt. Für die Spannungsenergie erhalten wir das Volumenintegral nach Gleichung (3.27)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} \, dV = \int_V Ez^2 w''(x)^2 dx \, dy \, dz. \quad (6.105)$$

Nun kann für einen festen Punkt der Balkenachse ($x=\text{const.}$) die Integration über den Querschnitt mit der Fläche A ausgeführt werden. Man erhält

$$\int_A z^2 dy \, dz = I_y = I, \quad (6.106)$$

das axiale Flächenträgheitsmoment des Querschnittes bezüglich der y -Achse. Somit errechnet sich unter obiger Voraussetzung konstanten Balkenquerschnittes die innere Energie eines Biegebalkens zu

$$\Pi_i = \frac{1}{2} EI \int_0^l (w''(x))^2 dx. \quad (6.107)$$

Die Volumen- und Oberflächenkräfte werden im allgemeinen in eine Belastungsfunktion $q(x)$ zusammengefaßt, die in positiver z -Richtung an der neutralen Balkenachse angreift. Neben m einzelnen

Kräften Q in z -Richtung seien m' Biegemomente M um die y -Achse vorhanden. Damit lautet das Funktional für einen Biegestab

$$\Pi_{\text{Biegestab}} = \frac{1}{2}EI \int_0^l (w''(x))^2 dx - \int_0^l q(x) w(x) dx - \sum_{i=1}^m Q_i w_i + \sum_{i=1}^{m'} M_i w'_i. \quad (6.108)$$

Diese Beziehung (6.108) läßt sich durch folgende Annahme vereinfachen. Zwischen Anfangs- und Endpunkt des Balkens greifen weder Volumen- oder Oberflächenlasten noch Einzellasten (Kräfte oder Momente) an. Damit lautet die Gesamtenergie des Biegebalkens

$$\Pi_{\text{Biegestab}} = \frac{1}{2}EI \int_0^l (w''(x))^2 dx - Q_0 w_0 - Q_l w_l + M_0 w'_0 + M_l w'_l, \quad (6.109)$$

wobei Q_0 und Q_l Kräfte in z -Richtung am Balkenanfang bzw. -ende sind und w_0 und w_l die entsprechenden Verschiebungen, sowie M_0 und M_l Momente um die y -Achse mit den zugehörigen (allerdings entgegengesetzten) Verdrehungen w'_0 und w'_l .

Somit kann als Näherungsansatz für den Verschiebungszustand die Lösung der linearen Theorie für ein unbelastetes Stabelement gewählt werden. Für die Biegelinie reicht somit ein Polynom dritten Grades aus (siehe z.B. [42], [66], [53], [105])

$$\begin{aligned} w(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\ w'(x) &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \\ w''(x) &= 2b_2 + 6b_3 x. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Unter der Bedingung, daß die Stabendverformungen wie folgt

$$w(0) = w_0, \quad w(l) = w_l, \quad -w'(0) = \varphi_0, \quad -w'(l) = \varphi_l \quad (6.111)$$

bekannt sind, ergeben sich nach einigem Umformungen die Polynomkoeffizienten

$$b_0 = w_0, \quad b_1 = -\varphi_0, \quad b_2 = \frac{3(w_l - w_0)}{l^2} + \frac{2\varphi_0 + \varphi_l}{l}, \quad b_3 = \frac{2(w_0 - w_l)}{l^3} - \frac{\varphi_0 + \varphi_l}{l^2}. \quad (6.112)$$

Nun kann das Gesamtpotential des Biegebalkens mit Hilfe der gegebenen Stabendverformungen ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Biegestab}} &= \frac{1}{2} EI \left[\frac{1}{l^3} (+12w_0 w_0 - 24w_0 w_l + 12w_l w_l) \right. \\ &\quad + \frac{1}{l^2} (-12w_0 \varphi_0 - 12w_0 \varphi_l + 12w_l \varphi_0 + 12w_l \varphi_l) \\ &\quad \left. + \frac{1}{l} (+4\varphi_0 \varphi_0 + 4\varphi_0 \varphi_l + 4\varphi_l \varphi_l) \right] \\ &\quad - Q_0 w_0 - Q_l w_l - M_0 \varphi_0 - M_l \varphi_l. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Zur Ermittlung der Gleichgewichtslage muß die potentielle Gesamtenergie nach den unbekanntenen Verschiebungsgrößen abgeleitet und zu Null gesetzt werden. Man erhält in Matrixschreibweise die übliche Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial w_0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_l} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ w_l \\ \varphi_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ Q_l \\ M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.114)$$

Im folgenden wollen wir etwas näher auf die Verformungen des Biegebalkens eingehen. Wie an der obigen Figur sehr leicht zu erkennen ist, überlagern sich Starrkörper- und elastische Verschiebungen. Die elastischen Verschiebungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \varphi_0 + \frac{-w_0 + w_l}{l} \\ \vartheta_l &= \varphi_l + \frac{-w_0 + w_l}{l}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Im folgenden werden, ohne die genauen Gründe anzugeben, zwei Funktionen dieser elastischen Verschiebungen ϑ_0 und ϑ_l eingeführt, und zwar

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{sum}} &= \vartheta_0 + \vartheta_l = \varphi_0 + \varphi_l + 2 \frac{-w_0 + w_l}{l} \\ \vartheta_{\text{diff}} &= \vartheta_0 - \vartheta_l = \varphi_0 - \varphi_l. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Nun werden diese beiden Werte quadriert und mit einem bestimmten Faktor multipliziert und die Resultate addiert.

$$\frac{3}{2} EI \frac{1}{l} \vartheta_{\text{sum}}^2 + \frac{1}{2} EI \frac{1}{l} \vartheta_{\text{diff}}^2. \quad (6.117)$$

Wenn man den Skalar (6.117) berechnet, erhält man die innere Energie des Biegebalkens Π_{BStab} nach (6.114) ohne das Potential der äußeren Lasten. Es ist demnach wiederum gelungen, die innere Energie des Balkens durch eine gewichtetes Quadrat auszudrücken; die gesamte Formänderungsenergie kann also als gewogene Quadratsumme von Verbesserungen gedeutet werden. Wenn es möglich ist die elastischen Änderungen ϑ_{sum} und ϑ_{diff} im globalen Koordinatensystem zu formulieren, ist eine Voraussetzung für die Berechnung von Stabtragwerken mit der Ausgleichsrechnung erfüllt.

6.5.2 Formänderungsenergie eines Stabelements infolge St. Venant Torsion

Bei der Belastung eines geraden Stabes mit rotationssymmetrischem Querschnitt durch ein reines Torsionsmoment dreht sich jeder Querschnitt ohne Verformung in seiner Ebene.

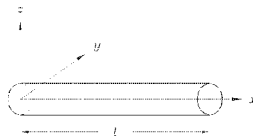


Abbildung 6.29: Torsionsstab

Mit dem Verdrehwinkel $\omega(x)$ ist die Deformation des Stabes unter der Annahme kleiner Drehwinkel gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 0 \\ v(x, y, z) &= -z\omega(x) \\ w(x, y, z) &= y\omega(x) . \end{aligned} \quad (6.118)$$

Die Verzerrungsvektor $\underline{\varepsilon}$ erhält damit unter Beachtung der Gleichung (3.11) die Komponenten

$$\underline{\varepsilon}^t = (0, 0, 0, -z\omega'(x), 0, y\omega'(x)) . \quad (6.119)$$

Mit dem Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ergibt sich nach Gleichung (3.17) folgender Spannungsvektor

$$\underline{\sigma}^t = (0, 0, 0, -Gz\omega'(x), 0, Gy\omega'(x)) . \quad (6.120)$$

Die Spannungsenergie des Torsionsstabes ist durch das Integral über das Volumen gegeben zu

$$\frac{1}{2} G \int_V (y^2 + z^2) (\omega'(x))^2 dx dy dz . \quad (6.121)$$

Für einen festen Punkt auf der Balkenachse ($x=\text{const.}$) wird nachfolgend die Integration über den Querschnitt mit der Fläche A ausgeführt

$$\int_A (y^2 + z^2) dy dz = I_p . \quad (6.122)$$

Man erhält das sogenannte polare Flächenträgheitsmoment I_t des Querschnittes. Dieser Wert ist unter der Voraussetzung von (6.118) hergeleitet worden und nur für kreisrunde bzw. kreisringförmige Querschnitte gültig. Für einen rechteckigen Querschnitt z.B. ist I_p durch das Torsionsflächenmoment I_t zu ersetzen. Falls wir uns auf den praktisch wichtigen Fall, daß nur an den beiden Stabenden äußere Torsionsmomente angreifen, erhalten wir bei konstantem Querschnitt für die gesamte potentielle Energie nach Gleichung (3.27)

$$\Pi_{\text{Torsion}} = \frac{1}{2} GI_t \int_0^l \omega'(x)^2 dx - M_0 \omega_0 - M_l \omega_l . \quad (6.123)$$

Aufgrund der Tatsache, daß lediglich an den Stabenden äußere Lasten angreifen, ist die Verschiebungsfunktion linear entlang der Balkenachse, woraus sich

$$\begin{aligned} \omega(x) &= c_0 + c_1 x \\ \omega'(x) &= c_1 \end{aligned} \quad (6.124)$$

ergibt. Unter den bereits oben genannten Randbedingungen

$$\omega(0) = \omega_0 , \omega(l) = \omega_l , \quad (6.125)$$

erhalten wir für die Verschiebungsfunktion

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega_0 + \frac{\omega_l - \omega_0}{l} x \\ \omega'(x) &= \frac{\omega_l - \omega_0}{l} = \text{const.} . \end{aligned} \quad (6.126)$$

Zur Ermittlung der Gleichgewichtslage wird das Gesamtpotential in den unbekanntem Verschiebungen ausgedrückt

$$\Pi_{\text{Torsion}} = \frac{1}{2} \frac{GI_t}{l} (\omega_l - \omega_0)^2 - M_0 \omega_0 - M_l \omega_l, \quad (6.127)$$

damit anschließend nach den Verschiebungen differenziert und das Ergebnis zu Null gesetzt werden kann.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_0} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GI_t}{l} & -\frac{GI_t}{l} \\ -\frac{GI_t}{l} & \frac{GI_t}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_0 \\ M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.128)$$

Wir erkennen an (6.128) die formale Identität von Zug- bzw. Druckstab und Torsionsstab.

6.5.3 Stabtragwerksberechnung mit der Ausgleichsrechnung

Nun wollen wir die Fehlergleichung in den globalen Koordinaten der Knoten ausdrücken, so daß sie in der bekannten Form $\underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x})$ vorliegen. Zunächst werden wir die Unbekannten \underline{x} definieren. Es handelt sich bei diesen Unbekannten um die Koordinaten der Netzknoten, sowie um die Verdrehungen, welche der Knotenpunkt um die Achsen des globalen Systems bei Belastung erleidet. Die globalen Koordinaten der Punkte seien mit (x, y, z) bezeichnet, die Verdrehungen des Knotens mit (α, β, γ) . Somit besitzt jedes Stabelement 12 Freiheitsgrade; je drei Verschiebungen und Verdrehungen am Anfangs- und Endpunkt. Weiterhin ist für jedes Stabelement ein lokales Koordinatensystem einzuführen (u, v, w) . Die u -Achse entspricht der Längsachse des Balkenelementes, die v -Achse bildet eine Hauptachse des Querschnitts und die w -Achse die zweite, sodaß insgesamt ein rechtshändiges, mathematisch positiv definiertes, Dreibein entsteht. Die Einheitsvektoren der (u, v, w) -Achsen im globalen Koordinatensystem bilden eine orthogonale Drehmatrix, die den Zusammenhang zwischen den lokalen und globalen Koordinatensystemen beschreiben. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (6.129)$$

Nach der Einführung der orthogonalen Drehmatrix \mathbf{R} kann vereinfacht geschrieben werden

$$\underline{u} = \mathbf{R} \underline{x}. \quad (6.130)$$

Für orthogonale Drehmatrizen gilt $\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$. Somit ist auch

$$\underline{x} = \mathbf{R}^t \underline{u}. \quad (6.131)$$

Diese Transformationen gelten nicht nur für die Verschiebungen, sondern unter ganz bestimmten Voraussetzungen auch für die Verdrehungen. Wenn man die lokalen Verdrehungen mit $(\omega, \varphi, \kappa)$ bezeichnet; den Vektor also mit $\underline{\omega}$, erhält man

$$\underline{\omega} = \mathbf{R} \underline{\alpha}. \quad (6.132)$$

Der Zusammenhang zwischen den lokalen Verschiebungen und den globalen ergibt sich z.B. in bezug auf die Biegung um die lokale v -Achse und unter Beachtung, daß i sich auf die aktuelle und a sich auf Ausgangslage des Tragwerkes beziehen, wie folgt

$$\begin{aligned} \varphi_{0_i} &= r_{21} (\alpha_{0_i} - \alpha_{0_a}) + r_{22} (\beta_{0_i} - \beta_{0_a}) + r_{23} (\gamma_{0_i} - \gamma_{0_a}) \\ w_{0_i} &= r_{31} (x_{0_i} - x_{0_a}) + r_{32} (y_{0_i} - y_{0_a}) + r_{33} (z_{0_i} - z_{0_a}) \\ w_{l_i} &= r_{31} (x_{l_i} - x_{l_a}) + r_{32} (y_{l_i} - y_{l_a}) + r_{33} (z_{l_i} - z_{l_a}). \end{aligned} \quad (6.133)$$

Nun können die elastischen Änderungen des Stabelementes nach Gleichung (6.115) als Funktion der unbekanntenen Knotenvariablen im globalen System ausgedrückt werden.

Im folgenden wird kurz gezeigt, wie sich die Rotationsmatrix im zweidimensionalen (ebenen) Fall vereinfacht. Dazu definieren wir die x, z -Ebene, die u -Achse als Stabachse und die w -Achse senkrecht dazu in der Tragwerksebene; zu ihr senkrecht steht die v -Achse, die so mit der globalen y -Achse zusammenfällt. Es ergibt sich folgende Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{31} & 0 & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.134)$$

Im einzelnen finden wir folgende Transformationen für den zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} u &= r_{11} x + r_{13} z \\ w &= r_{31} x + r_{33} z \\ \varphi &= \beta. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Nun werden wir die Formänderungsenergie des Torsionsstabes in den globalen Koordinaten ausdrücken. Wir erkennen an der Gleichung (6.127) die für die Torsionsenergie verantwortlichen Größen ω_0 und ω_l , die wir mit der Gleichung (6.132) formulieren; wir erhalten

$$\begin{aligned} \omega_0 &= r_{11} (\alpha_{0_i} - \alpha_{0_a}) + r_{12} (\beta_{0_i} - \beta_{0_a}) + r_{13} (\gamma_{0_i} - \gamma_{0_a}) \\ \omega_l &= r_{11} (\alpha_{l_i} - \alpha_{l_a}) + r_{12} (\beta_{l_i} - \beta_{l_a}) + r_{13} (\gamma_{l_i} - \gamma_{l_a}). \end{aligned} \quad (6.136)$$

Hier wurde die Formänderungsenergie als Quadratsumme von Verbesserungen, die ihrerseits eine Funktion globaler Knotenvariablen sind, für die Biege- und Torsionsenergie aufgestellt. Für die Normalkraft ist dies bereits bei den Fachwerken geschehen. Einer Berechnung dreidimensionaler Stabtragwerke mit dem allgemeinen Ausgleichungsansatz steht nun nichts mehr im Wege. Für ein allgemeines Stabelement erhalten wir 6 Verbesserungsgleichungen; jede Fehlergleichung schafft Anteile an der gesamten Formänderungsenergie. Im einzelnen sind dies

1. eine Normalkraftgleichung
2. zwei Biegemomentengleichungen um die erste zur Stabachse senkrechte Achse
3. zwei Biegemomentengleichungen um die zweite zur Stabachse senkrechte Achse
4. eine Torsionsmomentengleichung.

Die Gesamtsumme der Verbesserungsgleichungen im allgemeinen Fall, d.h. das Element besitzt keine Gelenke, ist also 6; bei 12 kinematischen Freiheitsgraden eines dreidimensionalen Balkenelementes (3 Verschiebungen und 3 Verdrehungen von Anfangs- und Endpunkt) erhalten wir statische Bestimmtheit, wenn z.B. alle Freiheitsgrade des Anfangspunktes unterdrückt werden. In diesem Fall ergibt sich ein Kragarm, dessen 6 Freiheitsgrade des Endpunktes mit den zur Verfügung stehenden 6 Verbesserungsgleichungen gerade bestimmt werden können.

Nun kann unser Potential für die Gesamtenergie wie gewöhnlich formuliert werden

$$\Pi_S(\underline{x}, \underline{v}, \underline{s}) = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{K} \underline{v}}_{\Pi_i} - \underbrace{\underline{s}^t (\underline{l}_0 + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x}))}_0 - \underbrace{\underline{p}^t (\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat..} \quad (6.137)$$

Im Gegensatz zu den bisherigen Tragwerken werden nun im Vektor \underline{p} nicht nur äußere Kräfte, sondern auch Momente gespeichert. Der Unbekanntenvektor \underline{x} enthält nicht nur die Ortskoordinaten der Knoten, sondern auch ihre Verdrehungen. Dies stört uns in keiner Weise, denn der übliche Formalismus zur Lösung der Normalgleichungen bleibt unberührt.

Die 6 Fehler- bzw. Verbesserungsgleichungen implizieren die Existenz von 6 Beobachtungen. Diese Beobachtungen beschreiben letztlich die unverformte Elementgeometrie im dreidimensionalen Raum. Die Beschreibung der Beobachtungen bzw. Fehlergleichungen im zweidimensionalen Raum ist anschaulicher; deshalb beziehen sich die nachfolgenden Herleitungen auf ebene Tragwerke. Für den allgemeinen dreidimensionalen Fall verfährt man analog mit den zweiten zwei Biegemomentengleichungen und der Torsionsmomentengleichung.

Im folgenden werden die Fähigkeiten des Stabelementes für den ebenen Fall, Kräfte und Momente weiterzuleiten, vorgestellt. Die Beobachtungen werden explizit angegeben. Dazu werden in der Abbildung 6.30 die unverformte und verformte Elementgeometrie gezeigt. Die Differenz der verformten und der unverformten Geometrie, sie besitzt den Index 0, ist die Verbesserung.

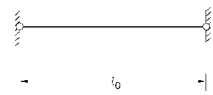
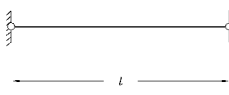

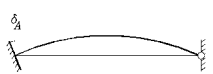
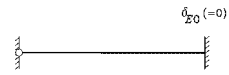


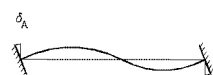
unverformt	verformt
	
Elementtyp 1 → Normalkraft	
	
Elementtyp 2 → Biegemoment am Anfang	
	
Elementtyp 3 → Biegemoment am Ende	
	
Elementtyp 4 → beidseitig eingespannt	

Abbildung 6.30: Die vier Elementtypen der ebenen Stabtragwerke

Diese Verbesserungen entsprechen den elastischen Änderungen der Elemente. Die Beobachtungen, die zu den Biegemomenten gehören, also δ_{A0} und δ_{E0} , sind natürlich nicht immer identisch Null, obwohl

dies - wie in der Abbildung 6.30 - meistens der Fall sein wird. Sind diese Beobachtungen ungleich Null, werden gewissermaßen vorgebogene Elemente eingebaut.

Das erste Element zeigt die Normalkraftabtragung (Elementtyp 1). Da wir äußere Kräfte und Momente nur an den Knoten angreifen lassen, ist die Normalkraft konstant. Die Angabe des Elastizitätsmoduls, der Querschnittsfläche und der ungedehnten Länge l_0 ist erforderlich. Die ungedehnte Länge entspricht der Beobachtung. Der zweite Elementtyp (Biegemoment am Elementanfang) ist in der Lage ein Biegemoment am Elementanfang zu übertragen. Am Elementende ist das Biegemoment identisch Null (Momentengelenk). Zur Erfüllung des Gleichgewichts ist für den unbelasteten Stab eine konstante Querkraft erforderlich. Die Angabe des Elastizitätsmoduls, des Flächenmomentes zweiten Grades um die Achse, die senkrecht zur Tragwerksebene steht, und des Winkels δ_{A0} , der Beobachtung also, ist erforderlich. Dieser Winkel beschreibt die Differenz der Richtungen von der Systemlinie, die durch den Anfangs- und Endpunkt des Elementes festgelegt ist, mit der Tangente an die wahre Stabachse im Anfangspunkt.

Bei der Berücksichtigung der Schubverzerrungen ist darüberhinaus der Schubmodul und die effektive Schubfläche anzugeben. Der dritte Elementtyp wird der Vollständigkeit halber angegeben; er entspricht dem Typ 2, wenn man Anfangs- und Endpunkt vertauschte. Hier ist die Beobachtung δ_{E0} als bekannt vorausgesetzt. Die Definition der Beobachtung δ_{E0} ist analog zu der Beobachtung δ_{A0} ; hier ist eben der Winkel im Endpunkt zu nehmen. Der Elementtyp 4 ist in der Lage ein lineares Biegemoment zu übertragen; d.h. am Elementanfang und -ende werden im allgemeinen unterschiedliche Biegemomente weitergeleitet. Zur Erfüllung des Gleichgewichts ist auch hier eine konstante Querkraft erforderlich. Die Angabe des Elastizitätsmoduls, des Flächenmomentes zweiten Grades um die Achse, die senkrecht zur Tragwerksebene steht, die Beobachtungen δ_{A0} und δ_{E0} sind erforderlich. Bei der Berücksichtigung der Schubverzerrungen sind darüberhinaus der Schubmodul und die effektive Schubfläche anzugeben.

Die Größen l_0 , δ_{A0} und δ_{E0} sind also die Angaben zur unverformten Elementgeometrie, die den Beobachtungen in der Ausgleichsrechnung entsprechen und die zwingend vorhanden sein müssen, wenn man die geodätische Ausgleichsrechnung anwendet.

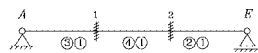


Abbildung 6.31: Balken auf zwei Stützen

Wir wollen dies an einem Balken auf zwei Stützen nach Abbildung 6.31 verdeutlichen. Das linke Balkenelement wird mit den 2 Verbesserungsgleichungen des Elementtyps 1 und 3, das mittlere mit den 3 Gleichungen 1 und 4, das rechte wiederum mit 2 Gleichungen (Typ 1 und 2). Wir haben somit $2 + 3 + 2 = 7$ Gleichungen zur Bestimmung von 7 unbekanntem Verschiebungen (2 Translationen und 1 Rotation in den Punkten 1 und 2 und eine Verschiebung im Punkt E). Das Ergebnis ist einleuchtend, denn die Redundanz dieses Tragwerks ist bekanntlich Null; es ist statisch bestimmt. Die Fähigkeiten der verschiedenen Elementtypen Lasten abzutragen, können also kombiniert werden, d.h. das Normalkraftelement (Typ 1) kann mit dem Biegemomentenelementtypen 2, 3 oder 4 zusammen ein Balkenelement bilden, das dann in der Lage ist, Normalkräfte, Querkkräfte und Biegemomente zu übertragen.

6.5.4 Hypersparsetechnik zur Berechnung ebener Stabtragwerke

Wie in dem Kapitel 5 bereits ausführlich dargelegt, wird mit der Verbesserungszeile, dem Widerspruch und dem Beobachtungsgewicht die Gesamtsteifigkeitsmatrix direkt aufgebaut. Hier lauten nun die Fehlergleichungen, deren Verbesserungen den elastischen Änderungen entsprechen, wobei l_0 die

ungedehnte Länge, E der Elastizitätsmodul, A die Querschnittsfläche, I das Flächenmoment zweiten Grades, (x_A, z_A, Φ_A) und (x_E, z_E, Φ_E) die Koordinaten des Anfangs- bzw. Endpunkts sind,

$$\begin{aligned}
 l_0 + v_{\text{ela1}} &= f_{\text{ela1}}(x_A, z_A, \Phi_A, x_E, z_E, \Phi_E) & p_{\text{ela1}} &= \frac{EA}{l_0} \text{Typ1} \\
 \delta_{A0} + v_{\text{ela2}} &= f_{\text{ela2}}(x_A, z_A, \Phi_A, x_E, z_E, \Phi_E) & p_{\text{ela2}} &= 3\frac{EI}{l_0} \text{Typ2} \\
 \delta_{E0} + v_{\text{ela3}} &= f_{\text{ela3}}(x_A, z_A, \Phi_A, x_E, z_E, \Phi_E) & p_{\text{ela3}} &= 3\frac{EI}{l_0} \text{Typ3} \\
 \delta_{S0} + v_{\text{ela4}} &= f_{\text{ela4}}(x_A, z_A, \Phi_A, x_E, z_E, \Phi_E) & p_{\text{ela4}} &= 3\frac{EI}{l_0} \text{Typ4} \\
 \delta_{D0} + v_{\text{ela5}} &= f_{\text{ela5}}(x_A, z_A, \Phi_A, x_E, z_E, \Phi_E) & p_{\text{ela5}} &= \frac{EI}{l_0} \text{Typ4} .
 \end{aligned} \tag{6.138}$$

Die Beobachtungen δ_{S0} und δ_{D0} werden folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned}
 \delta_{S0} &= \delta_{A0} + \delta_{E0} \\
 \delta_{D0} &= \delta_{A0} - \delta_{E0} .
 \end{aligned} \tag{6.139}$$

Im folgenden soll gezeigt werden, wie der allgemeine Ausgleichungsansatz, mit dem die Stabtragwerke berechnet werden, mit den Möglichkeiten der Hypersparsetechnik umgesetzt wird. Wir gehen davon aus, daß die applikationsneutralen Netzalgorithmen bereits zur Anwendung gekommen sind. Zum Aufbau der Normalgleichungen werden nun folgende Gleichungen benötigt, wenn wir das Tragwerk nach 6.31 bestimmen.

Element	von	bis	von			bis			Gewicht	Widerspruch
			x	z	Φ	x	z	Φ		
I	A	1	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial x_A}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial z_A}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial \Phi_A}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial z_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial \Phi_1}$	p_{ela1}	\tilde{l}_{ela1}
			$\frac{\partial f_{\text{ela3}}}{\partial x_A}$	$\frac{\partial f_{\text{ela3}}}{\partial z_A}$	$\frac{\partial f_{\text{ela3}}}{\partial \Phi_A}$	$\frac{\partial f_{\text{ela3}}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela3}}}{\partial z_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela3}}}{\partial \Phi_1}$	p_{ela3}	\tilde{l}_{ela3}
II	1	2	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial z_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial \Phi_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial z_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial \Phi_2}$	p_{ela1}	\tilde{l}_{ela1}
			$\frac{\partial f_{\text{ela4}}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela4}}}{\partial z_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela4}}}{\partial \Phi_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela4}}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela4}}}{\partial z_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela4}}}{\partial \Phi_2}$	p_{ela4}	\tilde{l}_{ela4}
III	2	E	$\frac{\partial f_{\text{ela5}}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela5}}}{\partial z_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela5}}}{\partial \Phi_1}$	$\frac{\partial f_{\text{ela5}}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela5}}}{\partial z_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela5}}}{\partial \Phi_2}$	p_{ela5}	\tilde{l}_{ela5}
			$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial z_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial \Phi_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial x_E}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial z_E}$	$\frac{\partial f_{\text{ela1}}}{\partial \Phi_E}$	p_{ela1}	\tilde{l}_{ela1}
			$\frac{\partial f_{\text{ela2}}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela2}}}{\partial z_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela2}}}{\partial \Phi_2}$	$\frac{\partial f_{\text{ela2}}}{\partial x_E}$	$\frac{\partial f_{\text{ela2}}}{\partial z_E}$	$\frac{\partial f_{\text{ela2}}}{\partial \Phi_E}$	p_{ela2}	\tilde{l}_{ela2}

Tabelle 6.8: Verbesserungszeilen zum Aufbau der Normalgleichungsmatrix

Wir erkennen hier sehr schön, daß die Anzahl der Beobachtungen (7) gerade ausreicht, um die unbekannten Knotenverschiebungen (7) zu bestimmen.

6.5.5 Beispiel

Das eben erlernte soll an einem kleinen Beispiel vertieft werden. Wir berechnen ein Stabtragwerk mit 5 Knoten und 5 Kanten, das durch Einzelkräfte und Einzelmomente belastet wird.

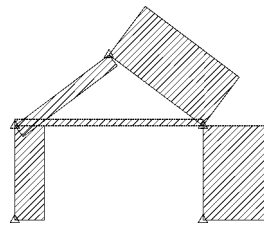
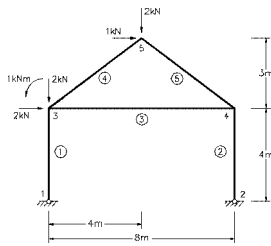


Abbildung 6.32: System und Belastung

Abbildung 6.33: Normalkräfte

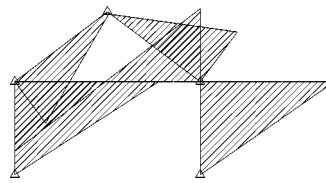
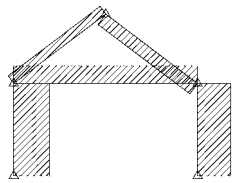


Abbildung 6.34: Querkräfte

Abbildung 6.35: Biegemomente

Das Ergebnis dieser Berechnung ist sehr einfach zu interpretieren. Sämtliche Normal- und Querkräfte sind konstant, da nur an den Stabwerksknoten äußere Lasten angreifen; die Biegemomente sind linear, Null bei den beiden Momentengelenken.

Mit den Verbesserungsgleichungen kann die Redundanz des Problems sehr einfach ermittelt werden. Jeder Stab des Tragwerks ist in der Lage Normalkraft zu übertragen, d.h. wir haben 5 ungedehnte Längen als Beobachtungen bzw. 5 Verbesserungsgleichungen. Die Elemente 1 und 2 besitzen ein Biegemomentengelenk, entsprechen also dem Elementtyp 2 oder 3; somit kommen eine Fehlergleichung pro Element, also 2 Fehlergleichungen hinzu. Die Elemente 3, 4 und 5 sind je beidseitig eingespannt, pro Element ergibt das 2 weitere Verbesserungszeilen. Wir haben also insgesamt 13 Beobachtungen. Diesen 13 Beobachtungen stehen 9 Unbekannte gegenüber, was einer Gesamtredundanz von 4 entspricht; das Stabtragwerk ist also vierfach statisch unbestimmt.

Wie sich die Redundanzanteile auf die einzelnen Elemente verteilen, ist der Tabelle 6.9 zu entnehmen.

Element	Normalkraft	Biegemomente
1	0.000	0.292
2	0.000	0.292
3	0.000	1.305
4	0.000	1.056
5	0.000	1.056
Σ	0.000	4.000

Tabelle 6.9: Redundanzanteile der Stäbe

Das Ergebnis der Redundanzanteilberechnung bestätigt die Gesamtredundanz 4 (die Summe über alle Anteile ergibt 4). Wir haben Redundanzanteile, die größer als 1 sind, bei den beidseitig eingespannten Elementen, denn bei ihnen sind 2 Verbesserungsgleichungen zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix vorhanden; damit liegt der Redundanzanteil Biegung zwischen 0 und 2. Die Redundanzanteile der Elemente 1 und 2 liegen natürlich zwischen 0 und 1, denn bei ihnen gibt es nur eine Fehlergleichung Biegung. Die Redundanzanteile der Normalkraft sind allesamt Null, d.h. ein Lastfall Imperfektion bezüglich der Einbaulängen führt zu keinen Zwängungsspannungen.

6.6 Geodätische Netzberechnungen aus mechanischer Sicht

Geodätische Netzberechnungen werden im allgemeinen nach vermittelnden Beobachtungen ausgeglichen. Das zu minimierende Potential ist uns bereits wohlbekannt; es lautet

$$\Pi(\underline{x}, \underline{v}, \underline{s}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t \mathbf{P} \underline{v} - \underline{s}^t (\underline{l}_0 + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x})) \Rightarrow \text{Minimum.} \quad (6.140)$$

Diese Formulierung ist auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich, denn die geometrische Verträglichkeitsgleichung ist in das Potential mit aufgenommen; sie wird mit einer unbekanntem Korrelate \underline{s} multipliziert. Dies stört uns wenig, denn wir können die unbekanntem Korrelaten ohne weiteres eliminieren, indem wir die Verbesserungen \underline{v} als Funktion der Unbekanntem \underline{x} ausdrücken und direkt in das Potential einsetzen, das nunmehr von lediglich einer Art von Unbekanntem abhängt. In diesem Fall erhalten wir

$$\Pi(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{v}^t(\underline{x}) \mathbf{P} \underline{v}(\underline{x}) \Rightarrow \text{Minimum.} \quad (6.141)$$

Diese Art der geodätischen Netzberechnungen ist allgemein üblich. Das Potential Π wird nach den unbekanntem Koordinaten \underline{x} abgeleitet und zu Null gesetzt. Das entstehende Gleichungssystem wird - im Falle nichtlinearer Abhängigkeiten zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen und den Unbekanntem linearisiert und nach der Einführung von Näherungswerten - gelöst. Die unbekanntem Korrelaten des Potentials nach Gleichung (6.140) werden nicht ermittelt. Und doch haben sie auch in der geodätischen Ausgleichsrechnung eine gewisse Bedeutung. Wir wollen sie wie in der Statik als Kräfte bezeichnen, wengleich sie hier natürlich nicht die Einheiten von Kräften haben. Diese Kräfte (Korrelaten) können durch die Gleichung

$$\underline{s} = \mathbf{P} \underline{v} \quad (6.142)$$

bestimmt werden, die man sehr einfach dadurch erhält, daß man das Potential nach Gleichung (6.17) nach den unbekanntem Verbesserungen \underline{v} differenziert und das Ergebnis zu Null setzt, und genau das ist zur Minimierung des Potentials zu tun. Diese Kräfte können also auch, wenn die Ausgleichung sozusagen herkömmlich durchgeführt wird, leicht berechnet werden.

In der Mechanik werden die Kräfte üblicherweise in Spannungen umgerechnet, deren Beurteilung keine Schwierigkeiten bereitet. Mit anderen Worten: die Kräfte in den einzelnen Stabelementen dienen nicht nur zur Beurteilung der Stäbe selbst. Die Summation der Kräfte in den Festpunkten ermöglicht die Beurteilung der Festpunkte.

Wie nun können diese Kräfte herangezogen werden zur Beurteilung der geodätische Netze? Die Antwort ist einfach: genau gleich wie bei Tragwerken in der Mechanik.

Ein Beweis für die Richtigkeit der nachfolgenden Behauptungen unterbleibt an dieser Stelle, obwohl der Verfasser keine Zweifel besitzt, was folgenden Sachverhalt anbelangt.

Die Güte von Festpunkten bei der Netzausgleichung wird dadurch überprüft, daß die Festpunktkoordinaten mit einem gegebenen mittleren Fehler beobachtet werden. Das Ergebnis der Ausgleichung ermöglicht nun die Beurteilung der Festpunktkoordinaten mit den üblichen Kriterien.

Mit den elastomechanischen Analogien ist dieser Weg nicht nötig. Man bestimmt ganz einfach die Auflagerreaktionen der Festpunkte. Da in der Netzausgleichung äußere Kräfte fehlen, zeigen sich die Netzspannungen, die durch die überschüssigen Beobachtungen entstehen, an den Festpunkten. Die Auflagerreaktionen der Festpunkte bleiben gering, wenn sich die ausgeglichenen Beobachtungen nahezu zwangsfrei ins Festpunktfeld einpassen lassen oder sich die Verbesserungen dem stochastischen Modell entsprechend ergeben. Fällt nun etwa ein Festpunkt aufgrund einer sehr viel größeren Auflagerreaktion aus dem Rahmen, läßt dies auf einen fehlerhaften Festpunkt schließen. Dies entspricht exakt dem Modell der beweglichen Festpunkte, obwohl hier keinesfalls mit beweglichen Festpunkten gerechnet wurde.

Schlußbemerkungen

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Vereinheitlichung von Netztheorien bzw. der Beschreibung unterschiedlicher Netzprobleme in einer der Ausgleichsrechnung nachempfundenen und von ihr inspirierten Art und Weise. Es geht dabei nicht um die - das bloße Netz beschreibenden - topologischen Parameter, die ganz offensichtlich ein Bindeglied aller Netze darstellen, oder anders ausgedrückt, die bei allen Netzarten identisch sind. Die Einheiten dieser Topologie wurden erwähnt; es handelt sich um Knoten, Kanten, Linien und Maschen, die naturgemäß mit dem Netzbegriff verknüpft sind. Vielmehr bezieht sich die Vereinheitlichung auf das eigentlich Trennende bei der Netzberechnung, also auf die geometrische, physikalische oder sonstige Beschreibung von netzartigen Strukturen. Nun ist die Vielfalt der möglichen Netze beinahe unbegrenzt; aus diesem Grund werden hier nur Netze untersucht, die in eine gewisse Klasse fallen, oder genauer: die durch Minimierung eines Skalars stationär werden und somit eine identische und damit austauschbare mathematische Struktur besitzen.

Mit diesen Überlegungen kann nun die Grundstruktur, die aus der geodätischen Ausgleichsrechnung stammt und die klassischen Ausgleichsstrategien subsumiert und über sie hinaus erweitert ist, auf alle möglichen Netzarten angewendet werden. In der vorliegenden Arbeit wird dies im Hinblick auf Tragwerke untersucht. Deshalb werden die mathematischen Theorien zur Elastizität hergeleitet, damit die Grundbegriffe Gleichgewicht, Kompatibilität und das Werkstoffgesetz eingeführt werden können. Die Grundvoraussetzung für die Anwendung der Grundstruktur auf andere Netzarten ist die Formulierung als Extremalaufgabe; so bekommt das Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials und das daraus abgeleitete Prinzip der virtuellen Verrückungen wesentliche Bedeutung. Durch das Prinzip der minimalen Gesamtenergie kann die Anwendung der Grundstruktur, wie wir sie als die Grundgleichung der Ausgleichsrechnung bezeichnen, auf elastomechanische Netze erfolgen. Die analogen Größen können zugeordnet werden. Insbesondere wird offenbar, daß die sogenannte Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen dem Weggrößenverfahren und die bedingte Ausgleichung dem Kraftgrößenverfahren entspricht. Nicht alle in der Grundstruktur der Ausgleichsrechnung definierten Werte besitzen eine Entsprechung in der Tragwerkslehre. Erweiterungen in der Theorie des Weg- bzw. Kraftgrößenverfahrens sind somit erforderlich. Die Bedeutung dieser neuen Größen in der Elastomechanik wird untersucht. Aber nicht nur die Übertragung von Begriffen und Sachverhalten aus der Ausgleichsrechnung in die Mechanik wird erfolgreich durchgeführt. Man kann auch den umgekehrten Weg einschlagen; so werden die Kräfte und Auflagerreaktionen zur Beurteilung geodätischer Netze herangezogen. Die Vorteile der geometrisch nichtlinearen Formulierung der Grundstruktur ist auch bei den Tragwerken vorhanden. Deshalb ist die unverformte Geometrie der elastischen Elemente vorzugeben; damit werden die sogenannten Beobachtungen der Grundstruktur bzw. der Grundgleichung der Ausgleichsrechnung geschaffen. Zuverlässigkeitskriterien werden auf die Tragwerkslehre angewendet. Es zeigt sich, daß die Redundanzanteile der Beobachtungen auch in der Elastomechanik zur Beurteilung von Tragwerken dienen.

In den Anwendungen wird gezeigt, daß Fachwerke, Stabtragwerke, einfache finite Elemente zur Plattenberechnung, pneumatische Minimalflächen mit der Grundgleichung der Ausgleichsrechnung berechnet werden können. Die Kräfte und Auflagerreaktionen bei geodätischen Netzen werden kurz erwähnt.

Durch die Tatsache, daß es nur eine mathematische Struktur der Grundgleichung für die unterschiedlichen Netzarten der definierten Klasse gibt, können die numerischen Verfahren zur Bestimmung der Unbekannten standardisiert werden. Da wir ausschließlich Netzprobleme lösen wollen und auch solche, deren Anzahl von Unbekannten groß sein darf, bieten sich für diese Standardisierung sogenannte Sparsealgorithmen an. Diese Algorithmen speichern keine Nullelemente ab, wodurch keine trivialen Rechneroperationen vorkommen, und so die Rechengeschwindigkeit maximiert und der Speicherplatzbedarf minimiert wird. Die Positionen der Nichtnullelemente in der Matrix sind bei diesen Verfahren

anzugeben. Sind die Matrizen, aufgrund der Tatsache, daß auf den Netzknoten mehrere Unbekannte definiert sind, partitioniert, also in Submatrizen aufgeteilt, so reicht es aus, die Position einer Submatrix anzugeben. In diesem Fall spricht man von Hypersparsealgorithmen. Dies ist bei den meisten Anwendungen der Fall, weshalb die Numerik unserer Grundstruktur sehr allgemein mit Hypersparsealgorithmen beherrschbar wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Formulierung von Netzaufgaben mit der mathematischen Struktur der Grundgleichung so allgemein formuliert werden kann, daß die Lösung der Aufgaben, ohne die Bedeutungsinhalte der Netztheorie anzugeben, ermittelt werden kann. Anders ausgedrückt: sämtliche Netzprobleme (unserer Klasse) können mit einem einzigen Computerprogramm beschrieben und gelöst werden. Alle Arbeiten an der Software dieses Programmes käme einer Vielzahl von Anwendungen zugute. Die Lösung von Netzproblemen beschränkte sich auf die Formulierung der jeweiligen Netztheorie in der Grundstruktur.

Hieraus ergibt sich eine Reihe von Schlußfolgerungen. Die Grundgleichungen der Ausgleichsrechnung sind mit der Hypersparsetechnik allgemein in einem Computerprogramm zu realisieren. Alle Größen, die in einer beliebigen Anwendung, von Bedeutung sein könnten, sind zu bestimmen. Durch ständige Erweiterungen wird das System immer vielseitiger. Im Hinblick auf die Anwendung der mathematischen Grundstruktur auf die Elastomechanik könnte die Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenvektoren z.B. ein weiterer Schritt zur Verbesserung des Gesamtsystemes darstellen.

Der Allgemeinfeld sollte durch wenige Steuerungsparameter in den Spezialfall zu verwandeln sein; also z.B. in die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten oder die vermittelnde Ausgleichung. Bereits als Software vorhanden sind die vermittelnde Ausgleichung und die vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten, womit sämtliche Anwendungen auch gerechnet wurden.

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, F.: *The Concept of Reliability in Aerial Triangulation*. Technischer Bericht, Politecnico Milano, 1979.
- [2] ARGYRIS, J. und MLEJNEK, H.-P.: *Methode der finiten Elemente*, Band I-III. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1986.
- [3] ARGYRIS, J.H.: *Die Matrizenmethode der Statik*. Ingenieur-Archiv 25, S. 174–192, 1957.
- [4] BAARDA, W.: *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission (5), Delft, 1968.
- [5] BAHNDORF, J.: *Zur Systematisierung der Seilnetzrechnung und zur Optimierung von Seilnetzen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 373, München, 1990.
- [6] BEDNARCZYK, H.: *Vorlesungen über Technische Mechanik*. Manuskript zur Vorlesung I–IV, Universität Stuttgart, 1983.
- [7] BERGE, C. und GHOUILA-HOURI, A.: *Programme, Spiele, Transportnetze*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969.
- [8] BIESS, G.: *Graphentheorie*. Harry Deutsch Verlag, 1979.
- [9] BUBNER, E., BAIER, B., KOENEN, R. und OELBERMANN, J.: *Minimalkonstruktionen*. Verlagsgesellschaft R. Müller, Köln-Braunsfeld, 1977.
- [10] BUFLER, H.: *Vorlesungen über Technische Mechanik*. Manuskript zur Vorlesung I–IV, Universität Stuttgart, 1980.
- [11] BUFLER, H.: *Vorlesungen über Energiemethoden*. Manuskript zur Vorlesung I, Universität Stuttgart, 1990.
- [12] BUNCH, J.R. und ROSE, D.J.: *Sparse Matrix Computations*. Academic Press, New York, 1976.
- [13] COURANT, R.: *Variational Methods for the Solution of Equilibrium and Vibration*. Bulletin of the American Mathematical Society 49, 1943.
- [14] COURANT, R. und HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, Band I–II. Springer Verlag, Berlin, 1968.
- [15] CROSS, H.: *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-end Moments*. Transactions of the American Society of Civil Engineers 96, S. 1–10, 1932.
- [16] CUTHILL, E. und J., MC KEE: *Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices*. In: *24th National Conference of ACM*, S. 157–172, 1969.
- [17] CZUBER, E.: *Theorie der Beobachtungsfehler*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1891.
- [18] ERISMAN, A.M. und TINNEY, W.F.: *On Computing Certain Elements of the Inverse of a Sparse Matrix*. Technischer Bericht, Communication of ACM, 1975.
- [19] EVANS, D.J.: *Sparsity and its Applications*. Cambridge University Press, London, 1985.
- [20] FALKENBERG, T.: *Genauigkeitsmaße in geodätischen Netzen und ihre elastostatischen Analogien*. Dissertation, Universität München, 1993.
- [21] FENVES, S. und BRANIN, F.: *Network - Topological Formulation of Structural Analysis*. Proceedings of the ASCE. Journal of the Struct. Division, S. 485–513, 1963.

- [22] FISCHER, W.: *Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungsgrößen auf mechanischem Wege und Anwendungen nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Zeitschrift für Vermessungswesen(27), S. 553–557, 1899.
- [23] FORD, L.R. und FULKERSON, D.R.: *A Network Flow Feasibility Theorem and Combinatorial Applications*. Canad. Journ. Math. (11), Santa Monica, 1959.
- [24] FÖRSTNER, W.: *Die Suche nach groben Fehlern in photogrammetrischen Lageblöcken*. Dissertation, Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 240, München, 1978.
- [25] FRIEDRICH, K.: *Aus den Grundgesetzen der Mechanik abgeleitete Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate nebst praktischen und erkenntnistheoretischen Folgerungen*. Zeitschrift für Vermessungswesen(72), S. 97–112, 1943.
- [26] GABRIEL, K.: *Bauen mit Seilen*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1988.
- [27] GALLAGHER, R.H.: *Finite-Element-Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [28] GAUSS, C.F.: *Abhandlung zur Methode der Kleinsten Quadrate*. A. Börsch und P. Simon, Berlin, 1889.
- [29] GERTHSEN, C. und KNESER, H.O.: *Physik*. Springer Verlag, Berlin, 1971.
- [30] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer Verlag, Wien, 1963.
- [31] GOTTHARDT, E.: *Einführung in die Ausgleichungsrechnung*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1968.
- [32] GRAFAREND, E.W., HEISTER, H., KELM, R., KROPFF, H. und SCHAFFRIN, B.: *Optimierung geodätischer Meßoperationen*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1979.
- [33] GROSSMANN, W.: *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung*. Springer Verlag, Berlin, 1969.
- [34] GRÜNDIG, L.: *Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängenetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichungsrechnung*. In: *SFB 64 Mitteilungen 34*, 1975.
- [35] GRÜNDIG, L.: *Datenverwaltungskonzepte für typische Aufgaben aus der Ingenieurgeodäsie*. Habilitation, Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 366, München, 1988.
- [36] GRÜNDIG, L.: *Sequential Optimization for Structural Networks and Water Supply Systems Based on Sensitivity and Reliability*. In: *Civil-Comp Press*, Edinburgh, 1989.
- [37] GRÜNDIG, L. und BAHNDORF, J.: *The Design of Wide-Spann Roof Structures using Micro-Computer*. In: *3rd International Conference on Civil and Structural Engineering Computing*, London, 1987.
- [38] GRÜNDIG, L., BAHNDORF, J. und NEUREITHER, M.: *Minimalflächenberechnung zur Formfindung von Membranen*. arcus (München), 1, 1987.
- [39] GRÜNDIG, L., BAHNDORF, J. und STRÖBEL, D.: *Hyper Sparse Techniques Applied to Geodetic Networks*. In: *7th International Symposium on Geodetic Computations*, Krakau, 1985.
- [40] HABER, R.B. und ABEL, J.F.: *Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes. Part I: Formulations; Part II: Implementation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (30), S. 263–284, S. 285–306, 1982.
- [41] HABER, R.B., ABEL, J.F. und GREENBERG, P.: *An Integrated Design System for Cable Reinforced Membranes Using Interactive Computer Graphics*. Computers and Structures (14), S. 261–280, 1981.

- [42] HAHN, H.G.: *Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M., 1975.
- [43] HANGLEITER, U. und GRÜNDIG, L.: *Der Einfluß von Fehlern auf das Verhalten von Netzen*. In: *Internationales Symposium 'Weitgespannte Flächentragwerke'*, Stuttgart, 1976.
- [44] HANGLEITER, U., GRÜNDIG, L. und SCHEK, H.-J.: *Beitrag zu den Genauigkeitsanforderungen bei Seilnetzen Simulation von zufälligen Fehlern an den Olympiadächern*. Der Stahlbau, S. 1–9, 1974.
- [45] HELMERT, F.: *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1907.
- [46] HIRSCHFELD, K.: *Baustatik*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [47] HÖPCKE, W.: *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1980.
- [48] HRENNIKOFF, A.: *Solution of Problems of Elasticity by Framework Method*. Journal of Applied Mechanics 8, S. 169–175, 1941.
- [49] JAEGER, R.: *Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanischen Analogien*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 342, München, 1988.
- [50] KOCH, W.R.: *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. Ferdinand Dümmler Verlag, Bonn, 1987.
- [51] KRAETZIG, W.B. und WITTEK, U.: *Tragwerke*, Band I–II. Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [52] LAWOW, M. und THIERAUF, G.: *Stabtragwerke - Matrizenmethoden der Statik und Dynamik*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1980.
- [53] LINK, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1989.
- [54] LINKWITZ, K.: *Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichsrechnung*. Zeitschrift für Vermessungswesen (5), 1960.
- [55] LINKWITZ, K.: *Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme*. Dissertation, Technische Hochschule München, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 46, München, 1961.
- [56] LINKWITZ, K.: *Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen*. Zeitschrift für Vermessungswesen (7), 1961.
- [57] LINKWITZ, K.: *Über eine neue Anwendung der Gaußschen Methode der Kleinsten Quadrate: Die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängennetzen*. Sonderdruck XXVII, Wissenschaftliche Gesellschaft Braunschweig, 1977.
- [58] LINKWITZ, K.: *Least-Squares Methods as a Tool to Calculate and Optimization of Design of Prestressed Nets and Hanging Nets*. Technischer Bericht, Akademia Kiado, Budapest, 1979.
- [59] LINKWITZ, K.: *Ausgleichsrechnung I*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1984.
- [60] LINKWITZ, K.: *Formfinding and Analysis of Cable Net Structures*. In: *3. Internationales Symposium 'Weitgespannte Flächentragwerke'*, S. 85–94, Stuttgart, 1985.
- [61] LINKWITZ, K.: *Einige Bemerkungen zur Fehlerellipse und zum Fehlerellipsoid*. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Schweizerischer Verein für Vermessung- und Kulturtechnik (SVVK), S. 345–364, 1988. 86. Jahrgang, Heft 7.

- [62] LINKWITZ, K.: *Bemerkungen zu Linearisierungen in der Ausgleichsrechnung*. Technischer Bericht, Institut für Photogrammetrie Stuttgart, Stuttgart, 1989.
- [63] LINKWITZ, K., BAHNDORF, J., HÖRDT, R., STRÖBEL, D. und SINGER, P.: *Least Square Methods in Nonlinear Formfinding and Analysis of Prestressed and Hanging Nets*. In: *Proceedings of SEIKEN-IASS Symposium of Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures*, S. 601–610, Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 1993.
- [64] LINKWITZ, K., GRÜNDIG, L., HANGLEITER, U. und BAHNDORF, J.: *Mathematisch-numerische Netzberechnung*. In: *SFB 64 Mitteilungen 72. Abschlußbericht Teilprojekt F2*, Stuttgart, 1985.
- [65] LINKWITZ, K. und SCHEK, H.J.: *Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetz-Konstruktionen*. Ingenieur-Archiv (4), S. 145–158, 1971.
- [66] MEISSNER, U. und MENZEL, A.: *Die Methode der finiten Elemente*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [67] MICHLIN, S.G.: *Variationsmethoden der mathematischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1962.
- [68] NAUNIN, D.: *Einführung in die Netzwerktheorie*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1985.
- [69] NEUREITHER, M.: *Modellierung geometrischer-topologischer Daten zur Beschreibung und Berechnung netzartiger und flächenartiger Strukturen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 387, München, 1992.
- [70] NITSCHKE, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [71] NOLTEMEIER, H.: *Graphentheorie*. Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1976.
- [72] OSTENFELD, A.: *Die Deformationsmethode*. Springer Verlag, Berlin, 1927.
- [73] OTTO, F.: *Das hängende Dach*. Ullstein Verlag, Berlin, 1954.
- [74] OTTO, F.: *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Band 1-2. Ullstein Verlag, Berlin, 1954.
- [75] OTTO, F.: *Minimalnetze*. In: *IL 1. Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke*, Stuttgart, 1969. Karl Krämer Verlag.
- [76] OTTO, F.: *Netze in Natur und Technik*. In: *IL 8. Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke*, Stuttgart, 1975.
- [77] OTTO, F.: *Lufthallenhandbuch*. In: *IL 15. Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke*, Stuttgart, 1983.
- [78] RAMM, E.: *Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1972.
- [79] RAMM, E.: *Platten*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1985.
- [80] RAMM, E.: *Vorlesungen über Stabtragwerke*. Manuskript zur Vorlesung I–IV, Universität Stuttgart, 1985.
- [81] RAMM, E.: *Shape Finding Methods of Shells*. In: *IASS Symposium 91, Spatial Structures at the Turn of the Millennium, Volume II*, S. 59–67, Kopenhagen, 1991.
- [82] REID, J.K.: *Large Sets of Linear Equations*. Academic Press, New York, 1971.
- [83] REINHARDT, F. und SOEDER, H.: *dtv-Atlas zu Mathematik*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1974.
- [84] ROEDER, R.: *Analyse und Optimierung von Transportnetzen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996.

- [85] RUOPP, M.: *Vermessungskunde*. Manuskript zur Vorlesung I–V, Universität Stuttgart, 1991.
- [86] SCHEK, H.J.: *Least-Squares-Lösungen und optimale Dämpfung bei nichtlinearem Gleichungssystem im Zusammenhang mit der bedingten Ausgleichung*. Zeitschrift für Vermessungswesen (2), 1975.
- [87] SCHEK, H.J.: *Über Ansätze und numerische Methoden zur Berechnung großer netzartiger Strukturen*. Habilitation, Universität Stuttgart, 1976.
- [88] SCHEK, H.J. und MAIER, H.: *Nichtlineare Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten und deren Kovarianzmatrix*. Zeitschrift für Vermessungswesen (4), 1976.
- [89] SCHEK, H.J., STEIDLER, F. und SCHAUER, U.: *Ausgleichung großer geodätischer Netze mit Verfahren für schwach besetzte Matrizen*. Technischer Bericht 87, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, München, 1977.
- [90] SCHENDEL, U.: *Sparsematrizen*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1977.
- [91] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1980.
- [92] SCHWARZ, H.R.: *Fortran-Programm zur Methode der finiten Elemente*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1981.
- [93] SCHWARZ, H.R.: *Numerische Mathematik*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1987.
- [94] SCHWARZ, H.R., RUTISHAUSER, H. und STIEFEL, H.: *Numerik symmetrischer Matrizen*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1972.
- [95] SINGER, P.: *Die Berechnung von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus aus geodätischer Sicht*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1995.
- [96] STARK, W.: *Untersuchung zur Lösung und Inversion schwach besetzter großer geodätischer Normalgleichungen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 301, München, 1985.
- [97] STEIN, E. und WUNDERLICH, W.: *Finite-Element-Methoden als direkte Variationsverfahren der Elastostatik*. In: *Finite Elemente in der Statik*, S. 71–125, Stuttgart, 1973. Ernst & Sohn Verlag.
- [98] STRÖBEL, D.: *Entwicklung von Hypersparsetechniken zur Gleichungslösung für Probleme in der Ausgleichsrechnung und der Statik*. Diplomarbeit, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1984, unveröffentlicht.
- [99] SZILARD, R.: *Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik*, Band I–II. Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1990.
- [100] TEMPLEMAN, A.B. und YATES, D.F.: *Mathematical Similarities in Engineering Network Analysis*. Civil Engineering Systems, 1: S. 114–122, 1984.
- [101] TEWARSON, R.P.: *Sparse Matrices*. Academic Press, New York, 1973.
- [102] THOMPSON, D.W.: *Über Wachstum und Form*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1973.
- [103] TIMOSHENKO, S.P. und GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1982.
- [104] TURNER, M.J., CLOUGH, R.W., MARTIN, H.C. und TOPP, L.J.: *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. Journal of Aeronautical Sciences 23, S. 805–824, 1956.
- [105] WERKLE, H.: *Finite Elemente in der Baustatik*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1995.
- [106] WOLF, H.: *Ausgleichsrechnung*, Band I–III. Ferdinand Dümmler Verlag, Bonn, 1975.

- [107] ZIENKIEWICZ, O.C.: *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Book Co, London, 1971.
- [108] ZURMÜHL, R.: *Matrizen*. Springer Verlag, Berlin, 1964.

Lebenslauf

Name: Dieter Ströbel

Geburtstag: 24. März 1958

Geburtsort: Freudenstadt

Staatsangehörigkeit: deutsch

Familienstand: verheiratet, ein Kind

Schule: 1965 - 1968 Chr. Gemeinschaftsschule Calw
1968 - 1972 Hermann-Hesse-Gymnasium Calw
1972 - 1977 Kepler-Gymnasium Freudenstadt

Wehrdienst: 1977 - 1978

Studium: 1978 - 1984 Studium der Geodäsie an der Universität Stuttgart
1985 - 1988 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart

Beruf: 1984 - 1985 Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Forschungsgesellschaft, Meß- und Rechentechnik mbH Leonberg
1988 - 1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen der Universität Stuttgart im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 230 Natürliche Konstruktionen
seit 1995 Entwicklungsingenieur bei der Firma technet GmbH, Berlin, Rottweil, Stuttgart